研究生教材

组合图论

ZU HE TU LUN

研　究　生　教　材

国防科技大学研究生教材专项经费资助

组合图论

谢政　戴丽　编著

国防科技大学出版社

·湖南长沙·

内容简介

全书共十章，包括图的基本概念、树、连通性、遍历性、匹配、Ramsey 数、着色、平面图、有向图、图的空间与矩阵以及图的计数等图论基本内容和理论。还介绍了相异代表系、鸽巢原理、容斥原理、递推关系、生成函数和 Pólya 计数定理等经典的组合数学原理。

本书取材精炼，难点分散，论述清晰，富于启迪，是一本很有特色的关于图论和组合数学的入门书，可作为运筹学、应用数学等专业的研究生教材，也可供管理科学、计算机科学、军事运筹学和系统科学等有关专业的教师、研究生和大学高年级学生参考。

图书在版编目(CIP)数据

组合图论/谢政，戴丽编著 .—长沙：国防科技大学出版社，2003.5

ISBN 7-81024-959-2

Ⅰ.组… Ⅱ.①谢…②戴… Ⅲ.图论 Ⅳ.O157.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 038761 号

国防科技大学出版社出版发行

电话：(0731)4572640 邮政编码：410073

E-mail：gfkdcbs@public.cs.hn.cn

责任编辑：文慧 责任校对：耿筠

新华书店总店北京发行所经销

国防科技大学印刷厂印装

*

787×960 1/16 印张：15 字数：296 千

2003 年 5 月第 1 版第 1 次印刷 印数：1-3000 册

*

定价：22.00 元

序

图论是研究离散对象二元关系中关系结构的一个数学分支，它与组合数学、拓扑学、代数学等学科关系密切，其应用十分广泛，已经渗透到物理学、化学、电子学、生物学、运筹学、经济学、系统工程以及计算机科学等诸多学科领域.

图论最引人入胜之处就在于它蕴含着大量强有力的思想、漂亮的图形、巧妙的论证和简洁的表述方式.现实生活中处处潜藏着图论问题，图论是最贴近生活、最容易入门的一门学科.图论会大量用到组合数学的原理和方法，同时，图论的某些结果也可以推广到组合数学中去，因此，图论与组合数学是密不可分的，甚至有人认为图论是组合数学的一个重要组成部分.

作为图论与组合数学的入门教材，本书系统地介绍了图论最基本、最重要的内容和原理，并注重融合组合数学的基本原理.我们希望读者不仅能系统地掌握图论的基本内容和方法，而且学会如何利用组合数学中的知识来解决图论中的问题，把图论与组合数学有机地结合起来，从而提高分析和解决实际问题的能力.由于这是一本组合图论的入门书，因此，我们没有涉及更多的图的算法.

全书共十章，包括图的基本概念、树、连通性、匹配、遍历性、Ramsey 数、着色、平面图、有向图、图的空间与矩阵以及图的计数等图论的基本内容和理论，还介绍了相异代表系、鸽巢原理、容斥原理、递推关系、生成函数和 Pólya 计数定理等经典的组合数学原理.每章精心配置的习题是对内容的巩固和扩充，是本书的重要组成部分.图论题目往往需要运用精彩的技巧才能解决，但并非深不可测，多做习题，有助于理解和掌握图论的思想和方法.

十多年来我一直在国防科技大学讲授研究生课程“图论与组合数

学”，本书是以该课程的讲义为基础，参考了大量国内外有关文献和教材修订而成的．编写图论与组合数学方面的教材是我们的初次尝试．如何以图论为主线，把组合数学的基本内容恰当地穿插其中，是我们自始至终追求的目标．本书是否符合我们的初衷，仁者见仁，智者见智，有待于读者去评价．

谢　政

2003年9月28日于长沙

目　录

第六章 着色与递推关系

第七章 平面图

第八章 有向图

第九章 图的空间与矩阵

第十章　图的计数与 Pólya 计数定理

第一章　图的基本概念

本章介绍图论的发展历史和特点以及图的定义，重要的图类，链、圈与连通分支等基本概念.

1.1　图论的历史和特点

图论是一个比较年轻的数学分支. 1736 年是图论的历史元年，这一年，Euler 研究并解决了一个当时著名的难题——Königsberg 七桥问题，发表了图论的首篇论文. Euler 是图论的创始人.

18 世纪，属于德国东普鲁士的 Königsberg 市被 Pregel 河穿城而过，河上有七座桥把河的两岸与河中的两个小岛连接起来，如图 1.1.1(a). 当时 Königsberg 的市民热衷于这样一个有趣的游戏：从 A、B、C、D 四块陆地的某一块出发，通过每座桥一次且仅仅一次，再回到原出发地，是否可能？很多人不断地探索都没能成功，于是，便去请教瑞士的大数学家 Euler，Euler 否定地回答了这个问题. 他把四块陆地抽象成四个几何点，把桥抽象成连接相应点的线，得到图 1.1.1(b)，从而使问题得到解决. 事实上，Königsberg 七桥问题就相当于能否用一支铅笔，从图 1.1.1(b)中 A、B、C、D 四个点中的某一个点出发，描过图中的每条线一次且仅仅一次，其间铅笔不允许离开纸面，再返回到原出发点. 由于图中任一个点都与

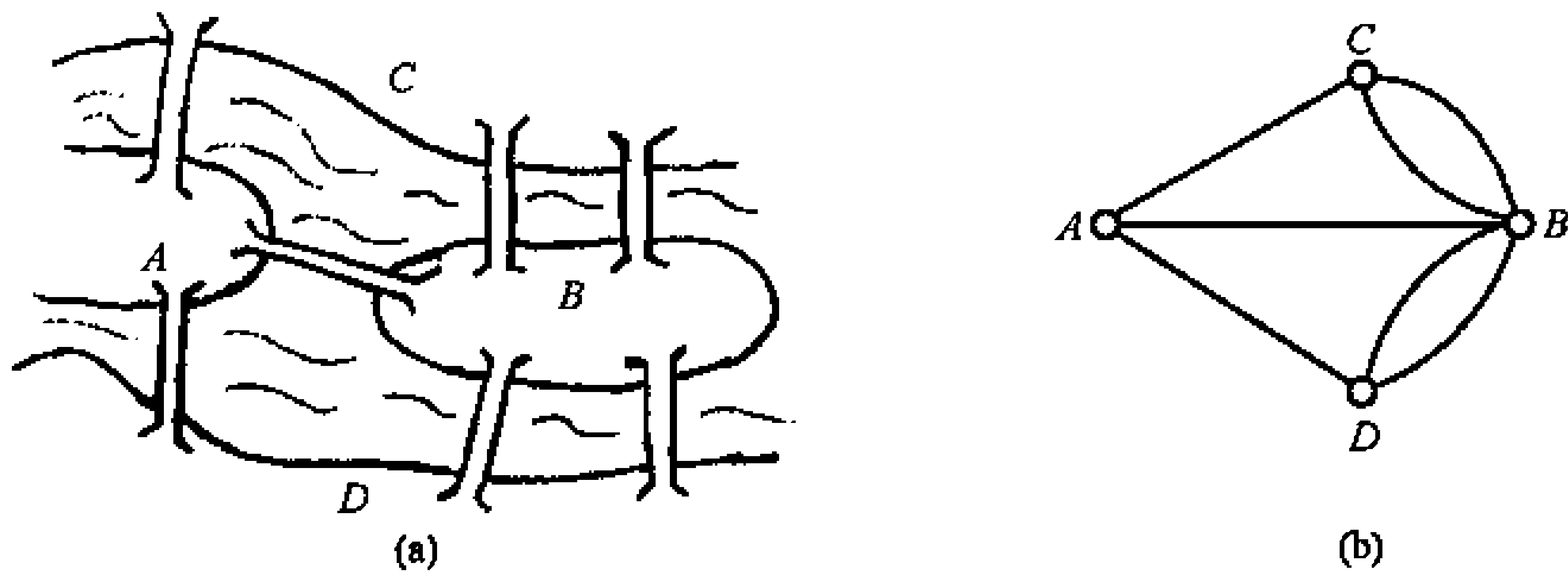


图 1.1.1　Königsberg 七桥问题

奇数条线相连,因此,对于任一点,都必然是先"出"后"回",最后以"出"告终,才能行遍与该点相连的所有线,所以,不管从图中从哪个点出发都不可能再回到原来的出发地.

Königsberg 七桥问题本身只是一种游戏而已,似乎并没有多大意义,但Euler给出的它的抽象意义和论证方法开创了图论科学研究的先河.

19 世纪,人们在不同的领域发现了图论.1847 年,Kirchhoff 为了解一类线性方程组而发展了树的理论.这个线性方程组是描述一个电网络的每一条支路中电流和环绕每一个回路的电流的.Kirchhoff 虽然是一个物理学家,但却可以像数学家那样思考问题,他把一个电网络和其中的电阻、电容、电感等抽象化了:像Euler那样,用一个只由点和线组成的相应的组合结构来代替原来的电网络,而并不指明每条线所代表的电气元件的种类.这样一来,Kirchhoff 实际上是把每个电网络用它的基本图代替.他还证明,为了解这个方程组,只要考虑一个图的任何一个支撑树所决定的那些基本圈就足够了.他的这个方法现在已成为一个标准的方法.

1857 年,Cayley 非常自然地在有机化学领域里发现了一族重要的图——树.在研究给定碳原子数 n 的饱和碳氢化合物 $C^1_nH_{2n+2}$ 的同分异构物的数目的过程中,把碳原子和氢原子都抽象成点,把化学键抽象成相应原子间的线,于是问题转化为求有 $3n+2$ 个点的树的数目,其中每个点的度(与该点相连的线的数目)等于 1 或 4.Cayley 没有能够立即成功地解决这个问题,所以他改换了这个问题,逐步计数了:有根树,树,每个点的度至多等于 4 的树,并最终解决了每个顶点的度为 1 或 4 的树的计数问题.后来,Jordan 从一个纯数学的角度独立地发现了树.

1852 年,一个叫 Francis Guthrie 的伦敦学生提出了四色问题:在地图或地球仪上,能否最多用四种颜色即可把每国之版图染好,使得国界线两侧异色?在图论中,也许在整个数学中,最出名的没有解决的问题就是著名的四色问题.这个问题是如此之简单,以至于任何一个数学家都可以在五分钟之内将这个非凡的问题向马路上的任何一个普通人讲清楚.可另一方面,这个问题又是如此之复杂,以至于时至今日,尚未能找到完整的理论性(非计算机的)证明.

20 世纪,随着现代生产和科学技术的发展,图论经历了一场爆炸性的发展.1936 年,第一本图论著作诞生了,这就是著名的匈牙利图论专家 König 所著的《有限图和无限图理论》,它总结了图论两百年的主要成果,是图论发展史上的重要里程碑.此后,图论开始迅速发展,并最终从组合数学中独立出来,成长为数学科学中一门独立的学科.它的主要分支有图论、超图理论、极值图论、算法图论、网络图论和随机图论等.科技的迅猛发展向图论提出了越来越多的需要解决的问题,使图论在科学界活跃非常.尤其是计算机科学的快速发展,为图论及其算

法的实现提供了强大的计算与证明的手段，而图论在开关理论、数据结构、操作系统、形式语言、计算机网络、编译程序、人工智能等方面，亦有显著贡献.

今天，图论仍迅速向前发展，图论研究越来越广泛深入，大批优秀的数学家潜心研究，为图论宝库增添了一个又一个精彩成果.时至今日，图论领域积累了大量的各种各样的难题，如 Hamilton 图问题. Hamilton 图是指顶点分布在同一个圆周上的一个图，它是 1895 年 Hamilton 玩环游世界的游戏时提出的.图论中这样的难题很多，至今 Hamilton 图的非平凡的充要条件尚未建立.又如Ramsey问题，直观地讲，Ramsey 问题就是：任给一群人，要么该人群中有 k 个人互相认识，要么有 l 个人互相不认识，问满足这种要求的人群至少有多少人？用$r(k,l)$表示该人群中的人数，易知 $r(3,3)=6$，即任何人数不少于 6 的人群中，必然要么有 3 个人互相认识，要么有 3 个人互相不认识.但至今我们也不知道$r(4,5)$的确切值是多少.目前已知的 $r(k,l)$值($k,l\geqslant 3$)只有有限的几个.

自从 Euler 于 1736 年研究 Königsberg 七桥问题以来，图论经历了 200 多年由慢到快的发展历程.图论之所以迅速发展，是因为现代科学技术的推进作用和图论自身的特点.图论把所研究的问题转化为一个符合美学外形的图，这样就使问题变得直观，使人们容易理解问题并对问题产生兴趣.同时也正是图论的图解式表示方法，为科学探索提供了一种自然的而又非常重要的语言和构架.许多图论问题都是从智力难题和游戏中提炼出来的，有些问题在本质上是初等的，但其中也有大量的问题可以难倒最老练的数学家.图论问题的解决需要巧妙的方法，没有可循的程式，问题外表的简单朴素和本质上的难以解决，使每个从事图论研究的人在图论问题面前都必须谨慎、严肃、深入地思考.因而学习图论可以锻炼思维，借助图论的思维方法可以提高解决问题的能力.

目前，图论领域形成了两个不同的研究方向：一个是以研究图的性质为主，我们称之为抽象图论；另一个是以研究图的算法为主，我们称之为算法图论，也称为网络最优化.本书中，我们重点介绍抽象图论，对算法图论感兴趣的读者可以参阅参考文献[21].

1.2　图的定义

现实生活中，经常会遇到涉及某些研究对象之间具有某种特定关系的问题.比如，在一个地区内，城市之间有没有交通线；一次球类比赛中，两个球队比赛过或没有比赛过；一群人中，两个人之间熟悉或不熟悉，等等.这类关系是对称的，即对象甲对对象乙有某种关系，也意味着对象乙对对象甲有我们要研究的关系，则就在代表对象甲和对象乙的两个小圆圈之间连一条线，这样，对象之间的关系

就可以用一个图形来描述.我们感兴趣的是对象之间是否具有某种特定关系,因此,小圆圈之间有无连线是重要的,而小圆圈的位置以及连线的长短曲直则无关紧要.由此,我们就得到了图的概念,把图中的小圆圈叫做顶点,把连线叫做边.

下面举一个著名的例子来说明图的概念.

例 1.2.1(Hamilton 游戏) 1859 年,英国数学家 Hamilton 爵士发明了一种游戏:把一个木制的十二面体的二十个顶点标记上二十个城市的名字,要求从一个城市出发,经过每个城市恰好一次,再回到原出发城市.

我们用小圆圈代表十二面体的各个顶点,用连接相应小圆圈的线来代表十二面体的各个棱,得到图 1.2.1. Hamilton 游戏问题就相当于在图 1.2.1 上,用一支铅笔从 20 个顶点中的某个顶点出发,描过图中每个顶点一次且仅一次,其间铅笔不允许离开纸,而且必须沿边前进再返回到出发顶点.容易知道,按顶点标号从小到大顺序前进,就是 Hamilton 游戏的一个走法. □

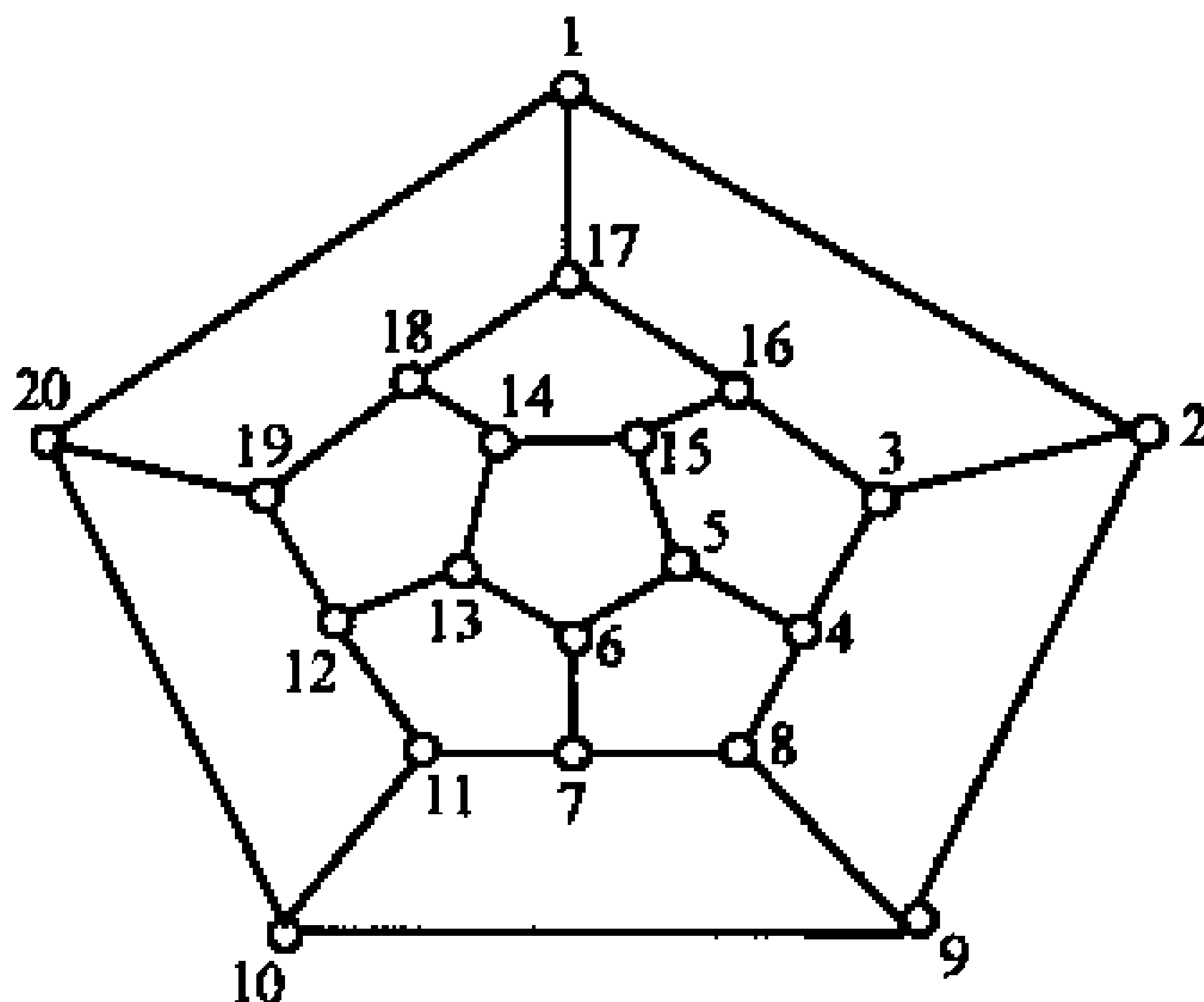


图 1.2.1 Hamilton 游戏

从 Hamilton 游戏问题以及上一节介绍的 Königsberg 七桥问题可以看出,图论中所说的图是描述研究对象之间关系的一种手段,它由若干个顶点和若干条边组成.下面我们给出图的数学定义.

图(graph) G 是指一个有序三元组($V(G)$, $E(G)$, ψ_G),其中 $V(G)\neq\emptyset$, $V(G)\cap E(G)=\emptyset$. $V(G)$中的元素称为图 G 的顶点(vertex),而 $V(G)$则称为 G 的顶点集(vertex set);$E(G)$称为 G 的边集(edge set),其中的元素称为 G 的边(edge);ψ_G 称为关联函数(incidence function),它是使 G 中的每条边对应于 G 的无序顶点对的函数.

若 $e\in E(G)$,且 $\psi_G(e)=uv$,则称 e 连接(join) u 和 v,或称 e 与 u 及 v 关联(incident),而 u 和 v 称为 e 的端点(end),也称为 u 与 v 是相邻的(adjacent).我们

把 G 中所有与顶点 v 相邻的顶点的集合称为 v 的邻域(neighbour)，记为 $N_G(v)$ 或 $N(v)$.

例 1.2.2　设 $G=(V(G),E(G),\psi_G)$，其中 $V(G)=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$；$E(G)=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6\}$；$\psi_G(e_1)=v_1v_4$，$\psi_G(e_2)=v_1v_2$，$\psi_G(e_3)=v_1v_2$，$\psi_G(e_4)=v_1v_3$，$\psi_G(e_5)=v_3v_3$，$\psi_G(e_6)=v_2v_3$. 则图 G 的图形(diagram)如图 1.2.2 所示. □

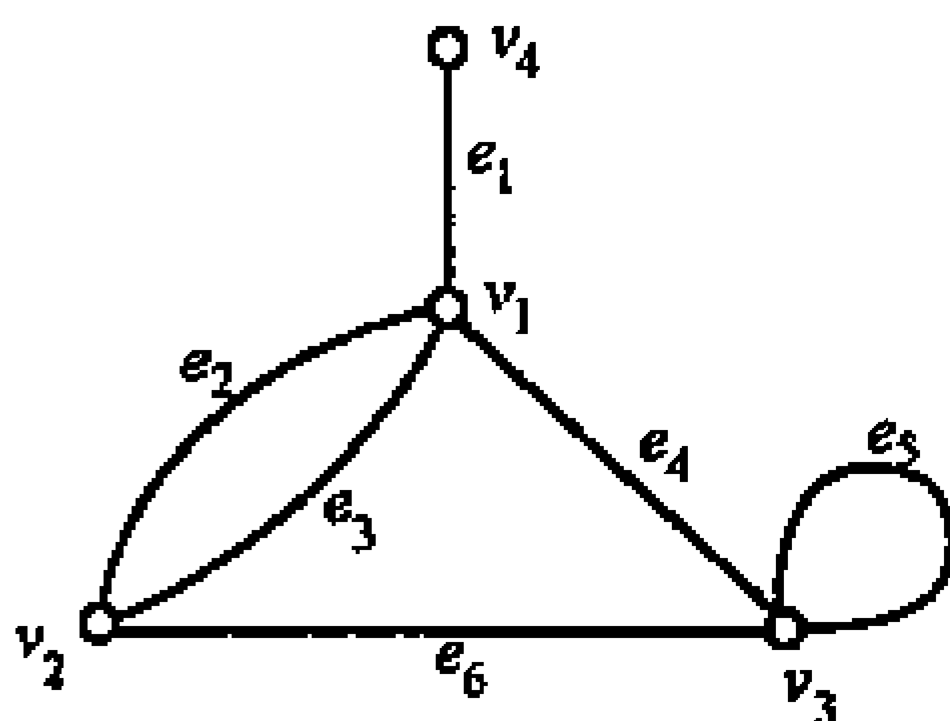


图 1.2.2　G的图形

如前所述，我们不考虑图的图形中顶点的位置和边的长短曲直，所以，经常把一个图与代表它的图形等同起来，即把代表图的图形也称为图. 这就是我们把前面那种有序三元组称为图的原因. 应当说明的是，图论中所研究的图表现的只是顶点集合上的二元关系，其本质是抽象的概念，并不是几何图形、工程图或美术图画.

为了书写方便，以后我们通常把图 $G=(V(G),E(G),\psi_G)$ 简记为 $G=(V(G),E(G))$，此时 $E(G)$ 中的边只需要用它的两个端点的无序对来表示. 用这种表示方法，例 1.2.2 中的图 G 可以记为 $G=(V(G),E(G))$，其中 $V(G)=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$，$E(G)=\{v_1v_4,v_1v_2,v_1v_2,v_1v_3,v_3v_3,v_2v_3\}$. 需要指出的是，在这种记号下，$E(G)$ 中有些元素是重复的. 如例 1.2.2 中，v_1v_2 在 $E(G)$ 中出现了两次.

若图的顶点集和边集都只含有限个元素，则称之为有限图(finite graph)，否则称之为无限图(infinite graph). 我们只讨论有限图.

与同一个顶点关联的两条边称为是相邻的(adjacent)；两个端点重合的边称为环(loop)，端点不重合的边称为连杆(link)；连接同一对顶点的两条边称为重边(multiple edge). 例如，在例 1.2.2 中，边 e_1 与边 e_4 是相邻的；e_5 是环，其他的边都是连杆；边 e_2 和边 e_3 是重边. 显然，“相邻”是指顶点与顶点之间、边与边之间的关系，而“关联”则是指顶点与边之间的关系.

若一个图既没有环也没有重边，则称之为简单图(simple graph). 例 1.2.2 中

的图 G 不是简单图，去掉它的重边和环得到的图 1.2.3 就是简单图了.

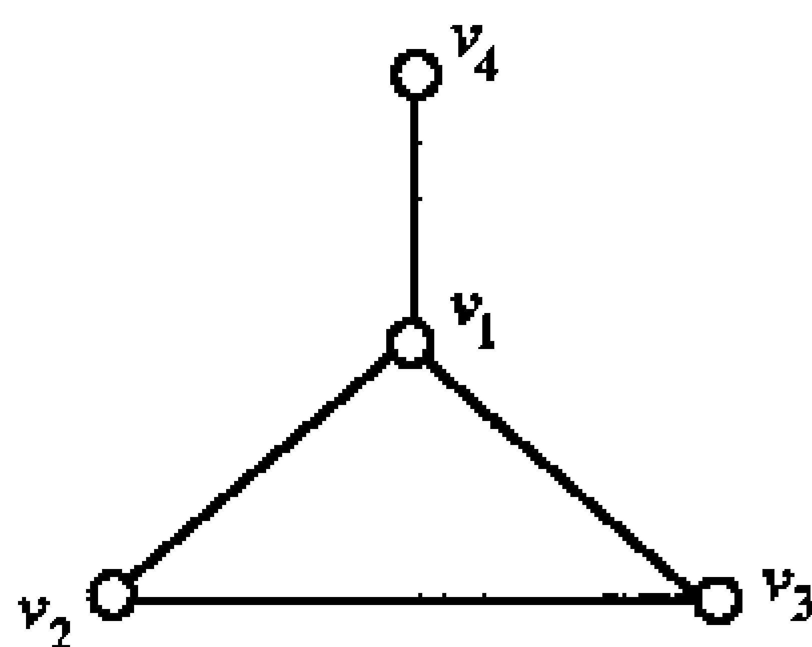


图 1.2.3 简单图

图 G 的顶点数、边数分别用 $\nu(G)$, $\varepsilon(G)$表示，即有 $\nu(G)=|V(G)|$, $\varepsilon(G)=|E(G)|$. $\nu(G)$又称为图 G 的阶(order). 当只讨论一个图时，我们常常省略 G，用 V, E, ν, ε 来代替$V(G), E(G), \nu(G), \varepsilon(G)$.

图 G 中顶点v 的度(degree)定义为与 v 关联的边的数目(与 v 关联的每个环算作两条边)，记为 $d_G(v)$. 在例 1.2.2 中，$d_G(v_1)=4$, $d_G(v_2)=3$, $d_G(v_3)=4$, $d_G(v_4)=1$.

为方便计，我们把度为 0 的顶点称为孤立点(isolated vertex)，度为 1 的顶点称为悬挂点(pendant vertex)，悬挂点关联的边称为悬挂边(pendant edge)，度为偶数的顶点称为偶点(even vertex)，度为奇数的点称为奇点(odd vextex). 用$\delta(G)$和$\Delta(G)$分别表示图 G 中顶点度的最小值和最大值，分别称为 G 的最小度(minimum degree)和最大度(maximum degree).

因为图 G 的每条边关联两个顶点，所以在计算顶点的度时，每条边在其端点各计算一次，即每条边对它的两个端点度的贡献各为 1，从而图 G 的一条边对于图G 的各个顶点的度的总和贡献为 2，于是得到如下著名的握手引理. 它是 Euler(1736)给出的.

定理 1.2.1(握手引理) $\sum\limits_{v\in V(G)} d_G(v) = 2\varepsilon(G)$. □

显然，任何图中所有顶点的度的和必为偶数.

例 1.2.3 证明空间中不可能存在这样的多面体，它们有奇数个面，而每个面上又都有奇数条棱.

证明 以多面体的面集合为$V(G)$，并且仅当两个面有共公棱时，在图G的相应顶点间连一条边，得到图 G. 由于已知 $\nu(G)$ 为奇数，而且 $d_G(v)$ 也是奇数 ($\forall v\in V(G)$)，因此 $\sum\limits_{v\in V(G)} d_G(v)$ 必是奇数，此与定理 1.2.1 矛盾，故这样的多面体不存在. □

推论 1.2.2 任何图中奇点的个数为偶数.

证明　设 V_1 和 V_2 分别为图 G 的奇点集和偶点集，由定理 1.2.1 知 $\sum_{v\in V_1} d_G(v) + \sum_{v\in V_2} d_G(v) = 2\varepsilon(G)$，其中 $\sum_{v\in V_2} d_G(v)$ 是偶数，所以 $\sum_{v\in V_1} d_G(v)$ 亦是偶数，而 $d_G(v)$ 是奇数（$\forall v \in V_1$），故 $|V_1|$ 是偶数．　□

现在引进图论中一个重要的概念 —— 图的同构．如果能够在图 G_1 和图 G_2 的顶点集 $V(G_1)$ 和 $V(G_2)$ 之间建立一一对应关系，使得连接 G_1 中任何一对顶点的边数等于连接 G_2 中与之对应的一对顶点的边数，则称 G_1 和 G_2 是同构的（isomorphic），记作 $G_1 \cong G_2$．显然，同构的图必有相同的顶点数和边数．图 1.2.4 中 G_1 和 G_2 是同构的．事实上，只要令 $u_1 \leftrightarrow u$，$u_2 \leftrightarrow w$，$u_3 \leftrightarrow y$，$v_1 \leftrightarrow v$，$v_2 \leftrightarrow x$，$v_3 \leftrightarrow z$ 即可．

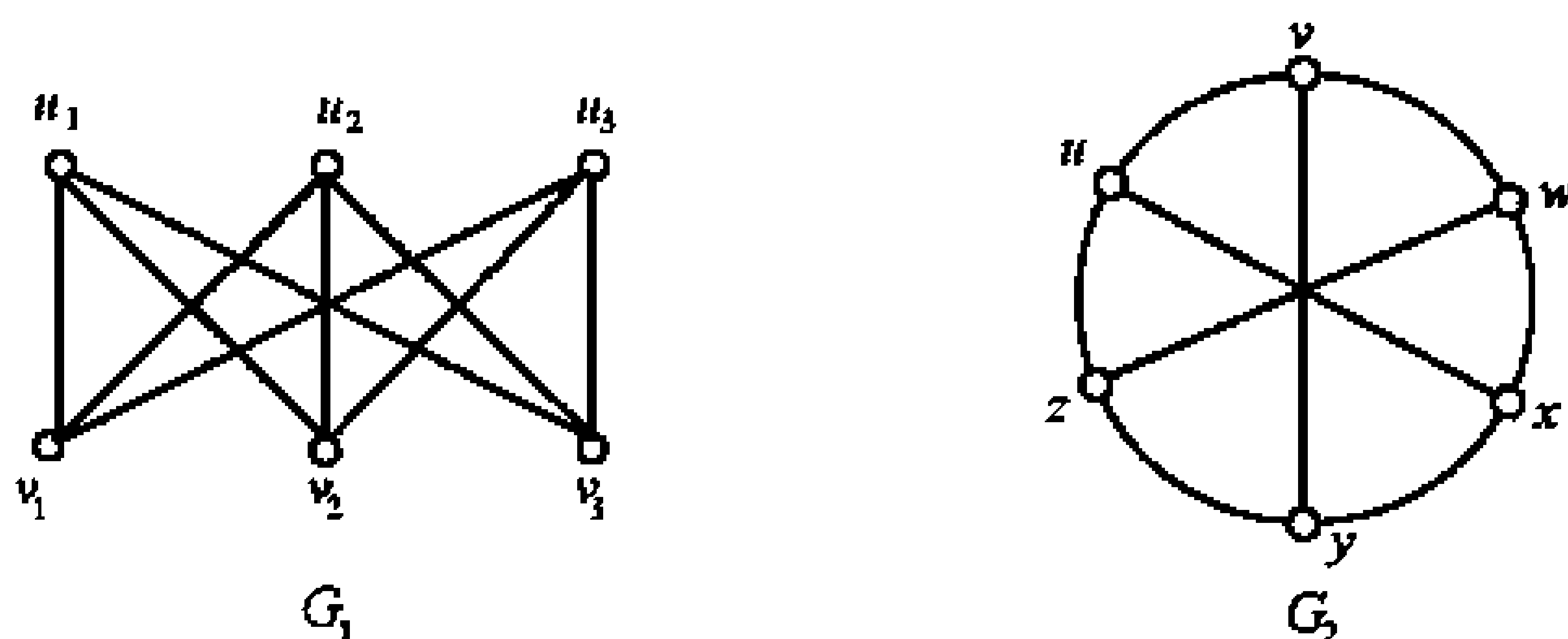


图 1.2.4　图的同构

如果两个图有相同的图形，则这两个图同构．两个同构的图本质上是相同的，只是顶点和边的标记不同而已．顶点已确定标号的图称为标号图（labelled graph）．

因为我们感兴趣的是图的结构性质，所以在画一个图的图形时，有时省略顶点和边的标号．一个无标号的图可以认为是同构图的一个代表．给一个图的顶点和边以标号是为了便于称呼它们．

1.3　重要的图类

图论中的图千姿百态，多种多样，许多图之间具有密切的联系，如图 1.3.1 中的四个图，G_0，G_1，G_2 都可以看成是图 G 的一部分，因为它们的顶点集和边集都分别是图 G 的顶点集和边集的子集．

设 H 和 G 为两个图，若它们满足 $V(H) \subseteq V(G)$，且 $E(H) \subseteq E(G)$，则称 H 为 G 的子图（subgraph），记作 $H \subseteq G$．图 1.3.1 中，G_0，G_1，G_2 都是 G 的子图．若 $V(H) = V(G)$，且 $E(H) = E(G)$，则称 H 与 G 相等，记作 $H = G$．若 $H \subseteq G$，且

$H \neq G$，则称 H 是 G 的真子图(proper subgraph)，记作 $H \subset G$。若 $V(H) = V(G)$，且 $E(H) \subseteq E(G)$，则称 H 是 G 的支撑子图(spanning subgraph)。图 1.3.1 中，G_0，G_2 是 G 的支撑子图，而 G_1 不是。

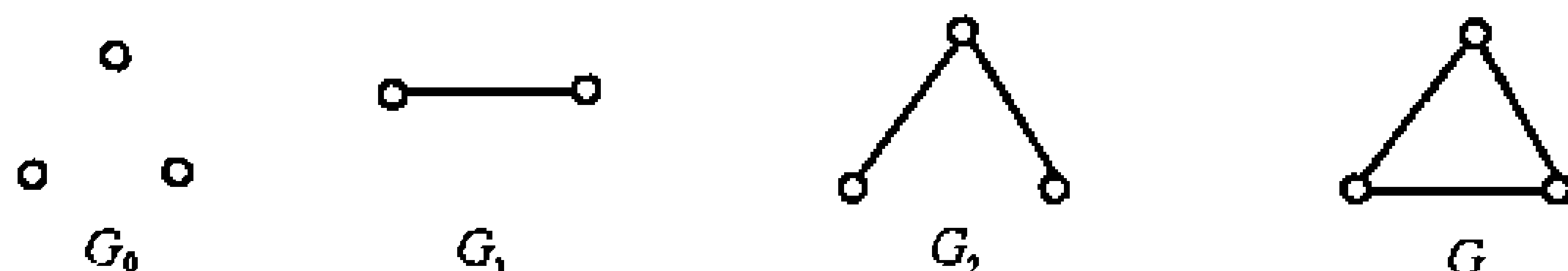


图 1.3.1 图与子图

从图 G 中删去所有的环，并且对连接任何一对顶点的重边，除保留一条外，去掉重边中余下的一切边，这样得到 G 的一个简单支撑子图H，称为 G 的基础简单图(underlying simple graph)。图 1.2.3 就是图 1.2.2 的基础简单图。

n 阶简单图最多有 $\binom{n}{2}$ 条边，我们称每对顶点都相邻的简单图为完全图(complete graph)，n 阶完全图记作 K_n。空图(empty graph) 是指边集为空集的图，显然，空图的每个顶点都是孤立点。若图中只有一个顶点，则称之为平凡图(trivial graph)，不是平凡图的一切其他图均称为非平凡图(notrivial graph)。

除了完全图、空图外，还有两类重要的图 —— 正则图和二部图。

正则图(regular graph) 是指每个顶点的度都相等的图。每个顶点的度都等于 r 的正则图称为 r 正则图。空图是 0 正则图，完全图 K_n 是 $n-1$ 正则图。

二部图(bipartite graph) 是指其顶点集可以划分成两个子集 X 和 Y，使得每条边的一端点在 X 中，另一端点在 Y 中，二部图 G 记作 $G = (X, Y, E)$。若 X 中每个顶点与 Y 中每个顶点之间恰有一条边，且 $X \neq \emptyset$，$Y \neq \emptyset$，则称二部图 $G = (X, Y, E)$ 为完全二部图(complete bipartite graph)。若 $|X| = m$，$|Y| = n$，则记这样的完全二部图为 $K_{m,n}$。图 1.3.2 中的两个图都是二部图，其中立方体也是 3 正则图。

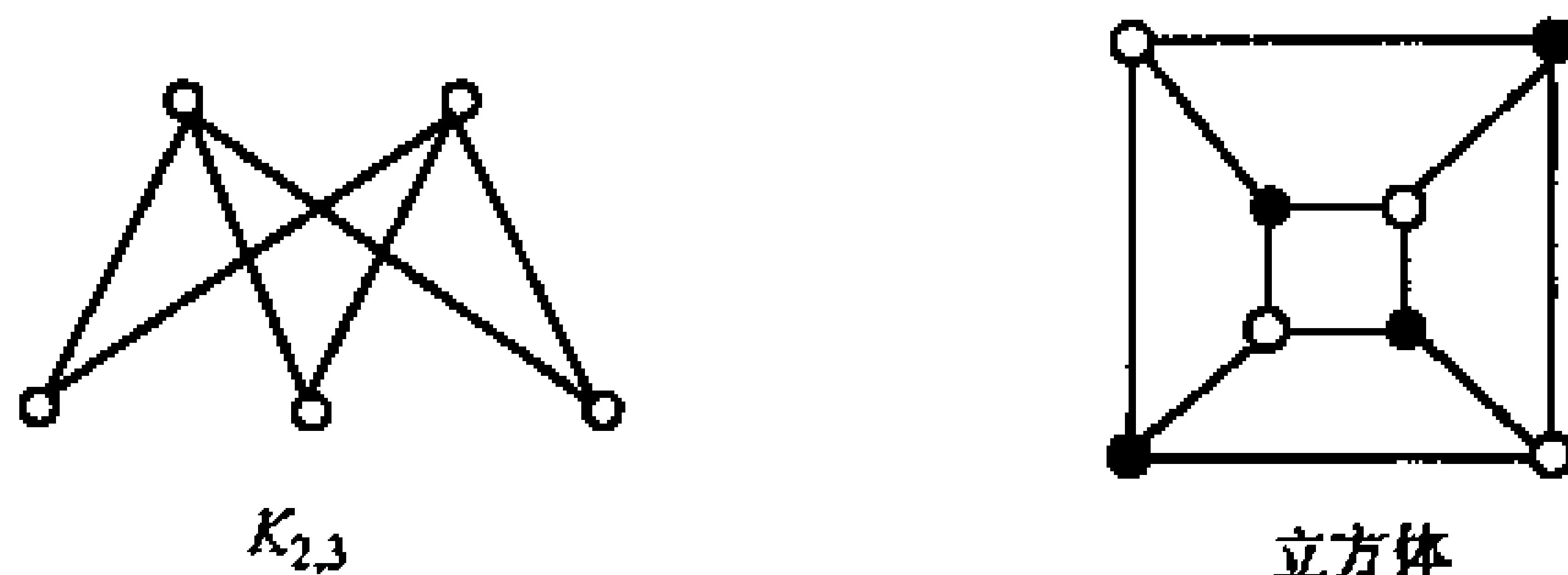


图 1.3.2 二部图

设 V' 是 $V(G)$ 的非空子集。以 V' 为顶点集、以 $E' =$

$\{uv \in E(G) \mid u, v \in V'\}$为边集的$G$的子图称为$G$的由$V'$导出的子图，记作$G[V']$，简称为$G$的导出子图(induced subgraph).

设E'是$E(G)$的非空子集，顶点集为$V' = \{v \mid v$是E'中某条边的端点$\}$，边集为E'的G的子图称为G的由E'导出的子图，记作$G[E']$，简称为G的边导出子图(edge-induced graph).

图1.3.3画出了图G的两种不同类型的子图.

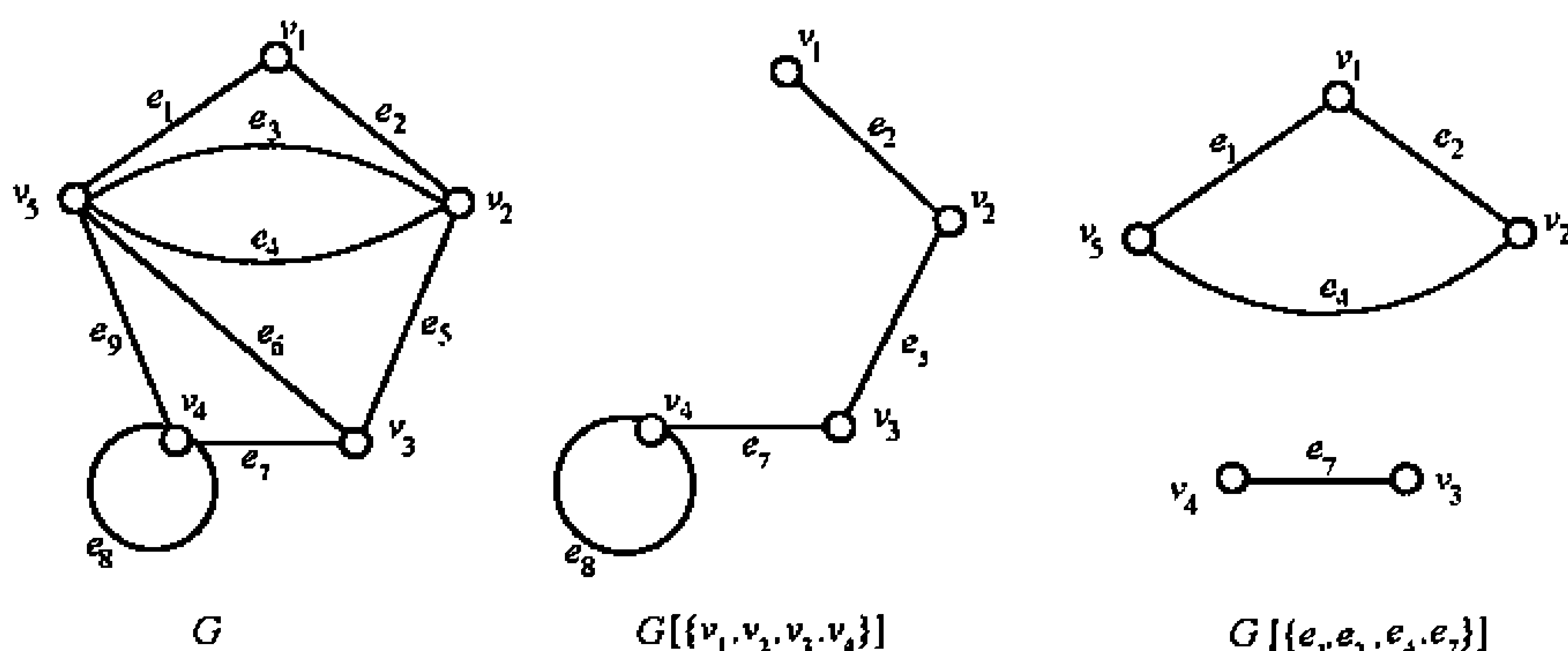


图1.3.3　图的导出子图和边导出子图

设F是$E(G)$的非空子集，$G-F$表示从G中删去F中一切边后得到的图. 若$F=\{e\}$，则$G-\{e\}$简记作$G-e$. $G-F$只删去F中的边，并不删去任何顶点，因此，$G-F$必为G的支撑子图.

设S是$V(G)$的非空真子集，则$G-S$表示从G中删去S的所有顶点及其与S中顶点关联的一切边后得到的图. 同样，$G-\{v\}$简记为$G-v$. 显然，$G-S=G[V\setminus S]$.

对于图1.3.3中图G，设$F=\{e_2,e_3,e_5,e_8\}$，$S=\{v_1,v_3\}$，则$G-F$，$G-S$分别如图1.3.4(a)，(b)所示.

与从图中G中删去边集相对应的是添加边集. 若在图G中添加一条以G的顶点u和v为端点的边e，则得到的图记作$G+e$. 类似地可以定义$G+E'$.

设图$G_1=(V_1,E_1)$，$G_2=(V_2,E_2)$. 若$V_1\cap V_2=\emptyset$，则称G_1和G_2是不交的(disjoint)；若$E_1\cap E_2=\emptyset$，则称G_1和G_2是边不交的(edge-disjoint). G_1和G_2的并图(union)是指图$(V_1\cup V_2, E_1\cup E_2)$，记作$G_1\cup G_2$. 若$G_1$和$G_2$是不交的，则把$G_1\cup G_2$记作$G_1+G_2$；若$G_1$与$G_2$至少有一个公共顶点，则定义$G_1\cap G_2=(V_1\cap V_2, E_1\cap E_2)$，称为$G_1$与$G_2$的交图(intersection).

图1.3.5给出了图的并运算与交运算.

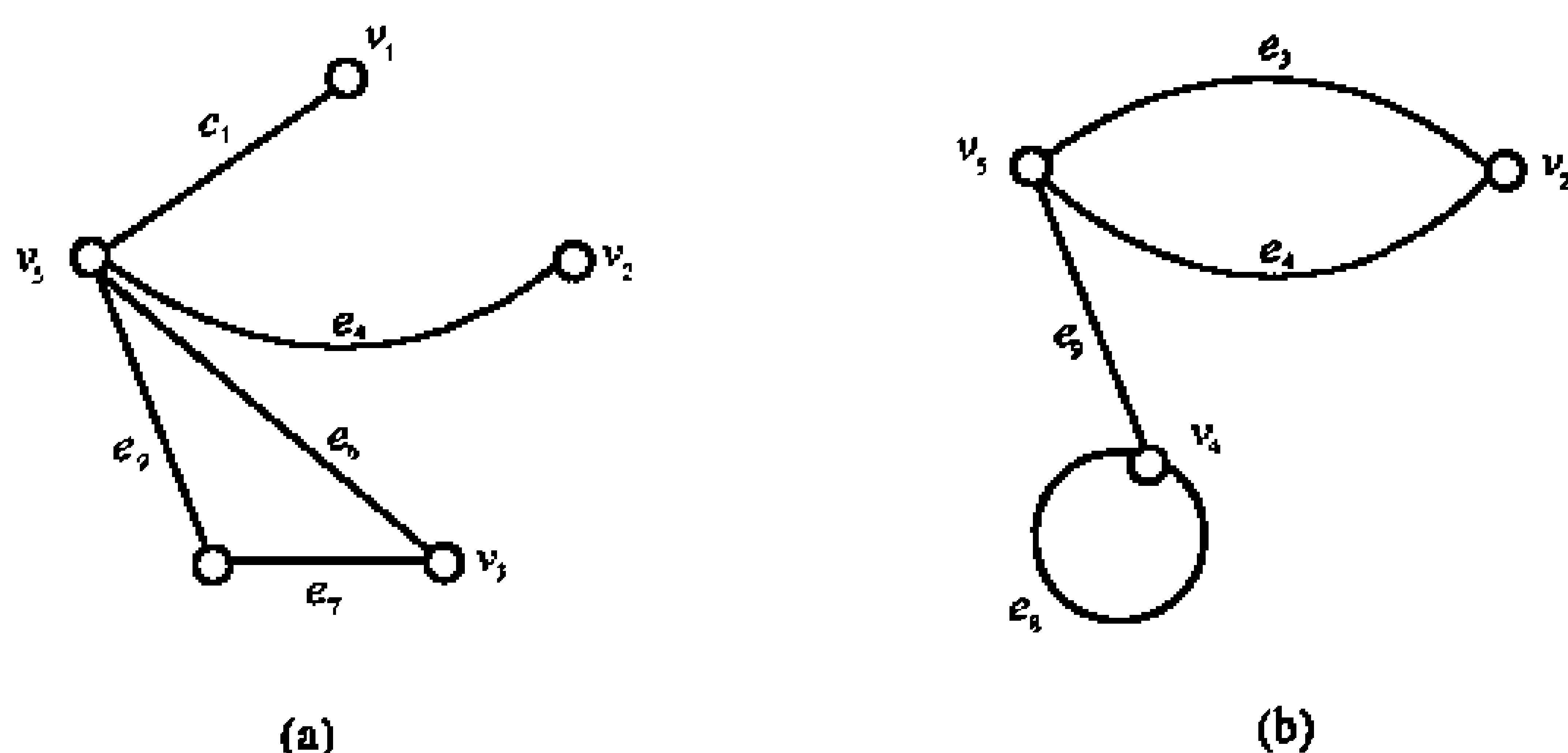


图 1.3.4 从图 G 中删去边集 F 和顶点集 S

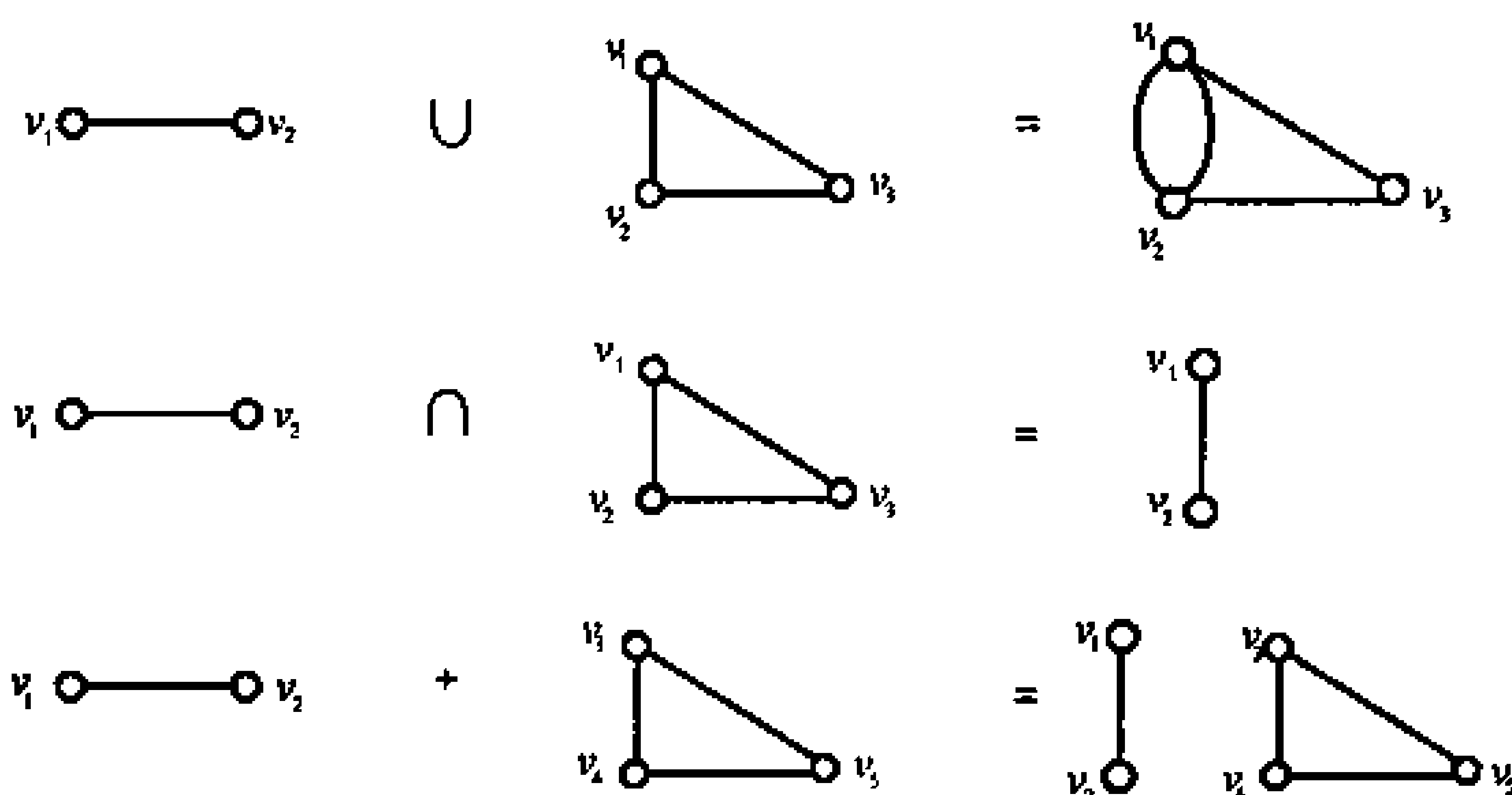


图 1.3.5 图的并与交

1.4 链、圈与连通分支

任何一个图的最基本的性质之一是它是否连通，这一节，我们要阐明连通图与非连通图的基本结构.

图 G 的一条途径(walk)是指一个有限的非空序列 $W = v_0e_1v_1e_2v_2\cdots e_kv_k$，这里 $v_i \in V(G)(0 \leqslant i \leqslant k)$，$e_j = v_{j-1}v_j \in E(G)(1 \leqslant j \leqslant k)$，$v_0$ 称为 W 的起点(origin)，v_k 称为 W 的终点(terminus)，$v_1, \cdots, v_{k-1}$ 称为 W 的内部点(internal vertex)，并把 W 称为G 的(v_0, v_k)途径，k 称为W 的长(length). 有时把途径 W 简记为 $W = v_0v_1\cdots v_k$. 值得注意的是，由于以 v_{i-1} 和 v_i 为端点的边可能不止一条，因此 $v_0v_1\cdots v_k$ 可能同时表示若干条不同的途径. 但是，简单图中的 $v_0v_1\cdots v_k$ 途径是惟一确定的.

如果 $W = v_0 e_1 v_1 \cdots e_k v_k$ 和 $W' = v_k e_{k+1} v_{k+1} \cdots e_l v_l$ 是图 G 中的两条途径，则 W 的逆转(inversion) $W^{-1} = v_k e_k \cdots v_1 e_1 v_0$；$W$ 与 W' 的衔接(concatenation) $WW' = v_0 e_1 v_1 \cdots e_k v_k e_{k+1} \cdots e_l v_l$；途径 W 的节(section)是 W 中由相继项构成的子序列 $v_i e_{i+1} v_{i+1} \cdots e_j v_j$，它也是 G 的一条途径，称为 W 的 (v_i, v_j) 节.

如果途径 W 的边互不相同，则称 W 为迹(trail)；若途经 W 的顶点互不相同，则称 W 为链(chain)，特别地，我们把一个顶点也称为一条链. 显然，链必定是迹，而迹却不一定是链.

如果途径的长至少为 1，且起点和终点相同，则称之为闭途径(closed walk). 类似地，可以定义闭迹(closed trail). 起点、内部点互不相同的闭迹称为圈(cycle)，长为 k 的圈称为 k 圈，按 k 的奇偶性，相应地称 k 圈为奇圈和偶圈. 1 圈就是环，3 圈又称为三角形(triangle).

图 G 中的链和圈可以看成是 G 的子图.

图 1.4.1 给出了途径、迹、链、闭迹、圈的例子. 其中途径：$v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 e_3 v_3 e_5 v_1 e_2 v_2 e_6 v_4$，迹：$v_0 e_1 v_1 e_5 v_3 e_3 v_2 e_4 v_3 e_1 v_4$，链：$v_0 e_1 v_1 e_3 v_2 e_1 v_4$，闭迹：$v_1 e_5 v_3 e_3 v_2 e_4 v_3 e_1 v_4 e_6 v_2 e_2 v_1$，圈：$v_1 e_5 v_3 e_1 v_4 e_6 v_2 e_2 v_1$.

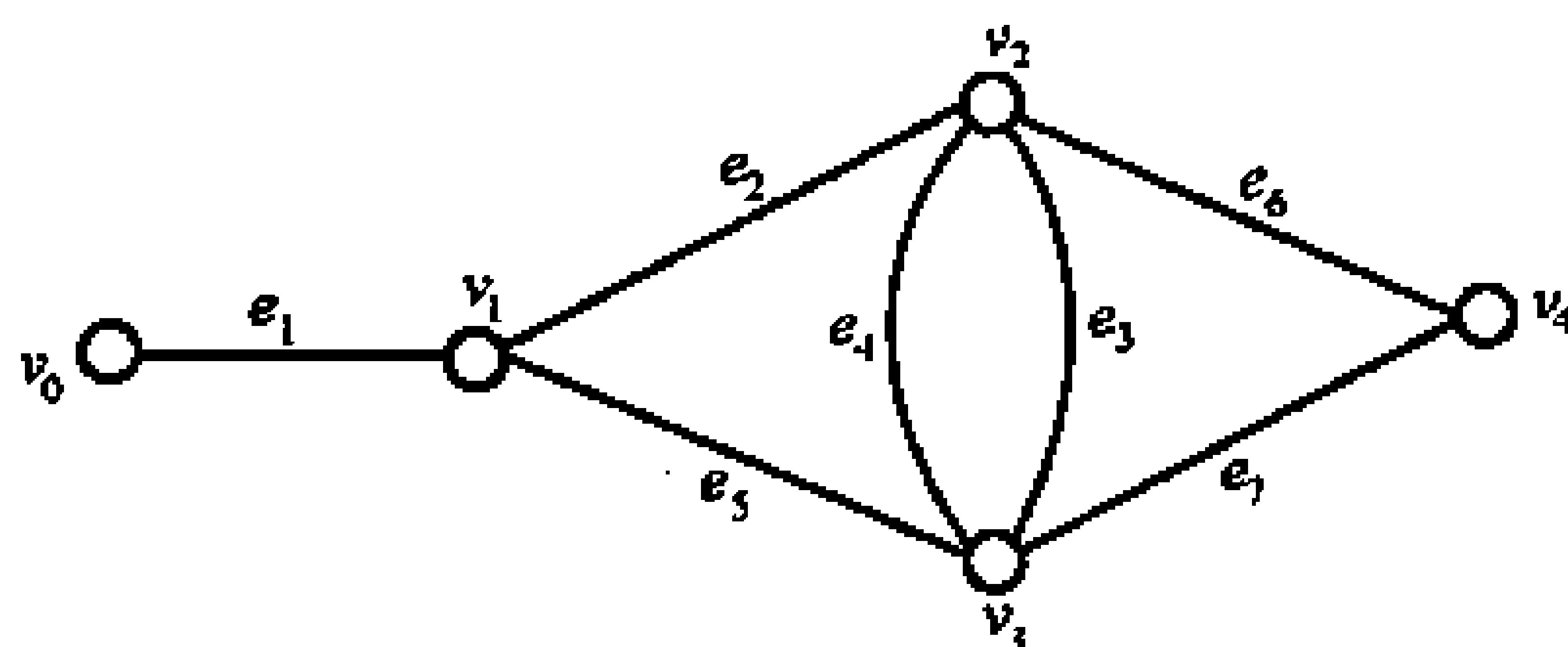


图 1.4.1　图 G 及其上的途径、迹、链、闭迹和圈

如果图 G 中存在 (u, v) 链，则称顶点 u 和 v 在图 G 中是连通的(connected). "连通"是顶点集 $V(G)$ 上的一个关系，它满足反身性、对称性和传递性，所以，是一个等价关系. 于是存在 $V(G)$ 的非空划分 $(V_1, V_2, \cdots, V_\omega)$，使得两个顶点 u 和 v 连通，当且仅当 u 和 v 属于同一个子集 V_i. 导出子图 $G[V_1], G[V_2], \cdots, G[V_\omega]$ 称为 G 的连通分支(connected component). 如果 G 恰好有一个连通分支，则称 G 是连通图(connected graph)；否则，称 G 是非连通图(disconnected graph). 我们用 $\omega(G)$ 表示 G 的连通分支数. 易知，G 是连通图，当且仅当 G 中任何两个顶点之间都有链连接. 图 1.4.2 中给出了连通图和非连通图的例子.

显然，图 G 的任何两个连通分支都是不交的，且非连通图可以表示为它的各个连通分支的并.

若顶点 u 和 v 在图 G 中连通，则 G 中所有 (u, v) 链中长度最短者称为 G 的

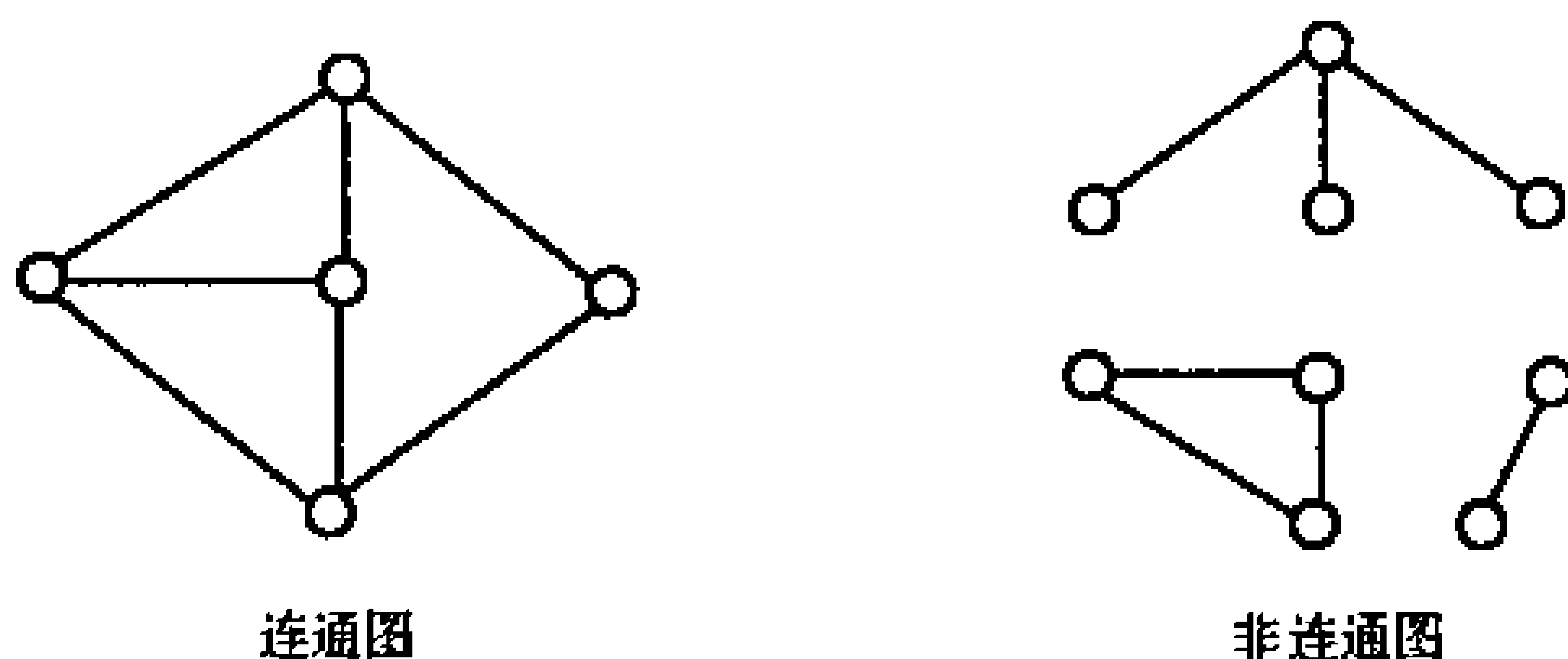


图 1.4.2 图的连通性

最短(u,v)链(the shortest chain),最短(u,v)链的长记为$d_G(u,v)$.若顶点u和v在G中不连通,则令$d_G(u,v)=\infty$,我们称$d_G(u,v)$为顶点u,v之间的距离(distance).在不致混淆的情况下,$d_G(u,v)$简记为$d(u,v)$.

可以用圈来刻画二部图,这就是下面的定理.

定理 1.4.1 图G是二部图,当且仅当G中不含奇圈.

证明

$(\Rightarrow)$ 设$G=(X,Y,E)$是二部图,$C=v_0v_1\cdots v_kv_0$是G中的一个圈,其长度为$k+1$.不妨设$v_0\in X$,于是$v_1\in Y,v_2\in X,\cdots$,一般地,有$v_{2i}\in X,v_{2i+1}\in Y$.由于$v_0\in X$,且$v_kv_0\in E(G)$,因此,有$k=2l+1$,从而$C$为偶圈.

$(\Leftarrow)$ 不妨设G连通(若G不连通,则任取一个连通分支证明之).假设G中不含奇圈,在G中取定一个顶点u,令

$$X=\{x\mid d(u,x)\text{ 为偶数}\},\quad Y=\{y\mid d(u,y)\text{ 为奇数}\}.$$

显然,$V(G)=X\cup Y,X\cap Y=\varnothing,u\in X,X,Y$是$V(G)$的一个划分.为了证明$G$是二部图,只须证明$X$中($Y$中)任何两个顶点都不相邻.设$v$和$w$是$X$中任意两个顶点,令$P$是$G$中最短$(u,v)$链,$Q$是$G$中最短$(u,w)$链.设$P$与$Q$的最后一个公共顶点是$u_1$,因为$P$和$Q$都是最短链,所以$P$的$(u,u_1)$节和$Q$的$(u,u_1)$节都是最短$(u,u_1)$链,从而长度相等($P,Q$链如图 1.4.3 所示).又因$P$和$Q$的长都是偶数,故$P$的$(u_1,v)$节$P_1$和$Q$的$(u_1,w)$节$Q_1$的长度有相同的奇偶性,于是,$(v,w)$链$P_1^{-1}Q_1$的长是偶数.因此,若$v$与$w$相邻,则$P_1^{-1}Q_1wv$就是$G$中一个奇圈,这与假设矛盾.即知$X$中任何两个顶点都不相邻.同理可证$Y$中的任何两个顶点也不相邻. □

要指出的是,本定理证明的关键是利用了"最短链"和"最后一个公共顶点",也就是利用了"极小"和"极大".这种方法称为"极小性原则"或"极大性原则",它是图论证明中一个常用的方法.

例 1.4.1 设G是连通图,且G中至少有一对顶点不相邻.证明存在u,v,w

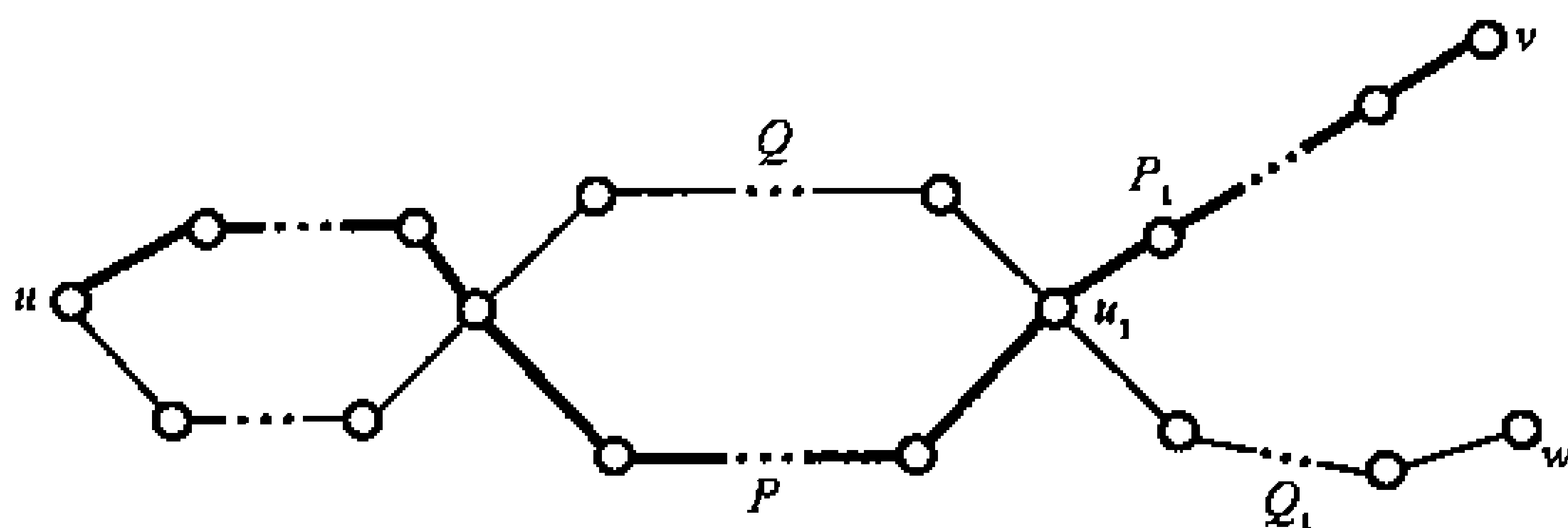


图 1.4.3　链 P 与 Q 的关系

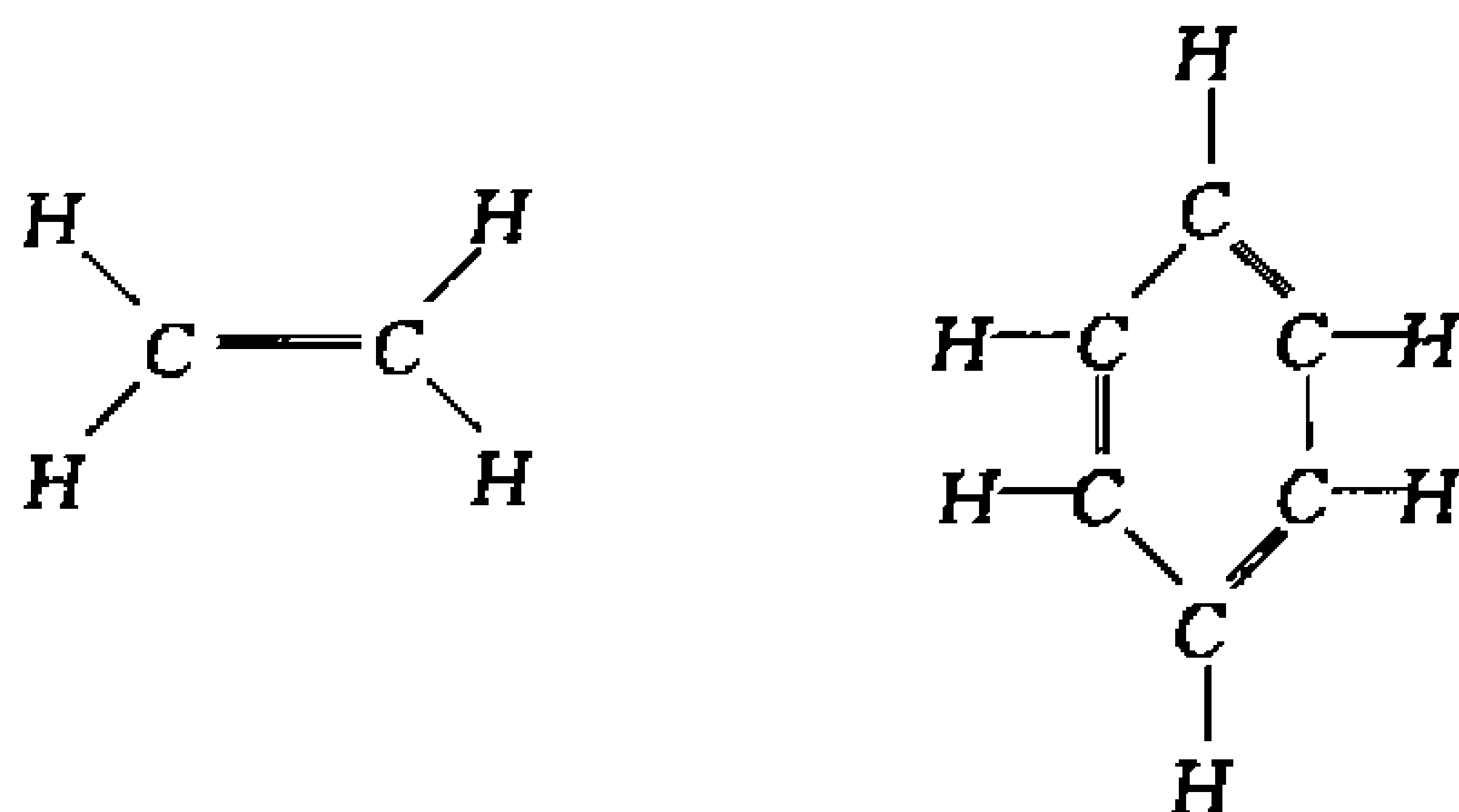
$\in V(G)$，使 $uv, vw \in E(G)$，但 $uw \notin E(G)$.

证明　设 $x, y \in V(G)$，且 $xy \notin E(G)$．因 G 连通，故 G 中存在最短 (x, y) 链 $P = xv_1v_2\cdots y$．由 P 的最短性可知 $xv_2 \notin E(G)$，于是令 $u = x, v = v_1, w = v_2$，则有 $uv \in E(G), vw \in E(G)$，但 $uw \notin E(G)$，　□

例 1.4.1 中给出的结论在以后的证明中会用到，这是一个很有用的结论．

习 题 一

1．题图 1.1 中画出的是乙烯和苯分子式，C 和 H 分别代表碳原子和氢原子，把分子式的结构图看成图，如果一个图代表碳氢化合物的分子式，问它应当具备哪些条件？



题图 1.1

2．设图 $G = (V, E)$，$V = \{v_1, v_2, \cdots, v_6\}$，$E = \{v_1v_2, v_2v_2, v_2v_4, v_4v_5, v_3v_4, v_1v_3\}$．

(1) 画出 G 的图形；

(2) 求 G 中各顶点的度数，并由此验证握手定理；

(3) 求出 G 中奇数度顶点的个数，并验证它满足推论 1.2.2；

(4) G 是简单图吗？

3. 设 $v_1,v_2,\cdots,v_\nu$ 是图 G 的顶点，则序列 $(d(v_1),d(v_2),\cdots,d(v_\nu))$ 称为 G 的度序列. 证明非负整数序列 $(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ 是某个图的度序列的充要条件为 $\sum_{i=1}^{n} d_i$ 是偶数.

4. 画两个 5 阶图，使其顶点的度序列分别为 (2,2,2,2,2) 和 (3,3,4,5,5).

5. 证明对任何图均有 $\delta \leqslant \frac{2\varepsilon}{\nu} \leqslant \Delta$.

6. 已知图 G 中有 10 条边，2 个顶点的度为 2，2 个顶点的度为 3，1 个顶点的度为 4，其余顶点都是悬挂点，问 G 中有多少个悬挂点？

7. 若 G 中有 12 条边，且 G 中有 6 个顶点的度为 3，其余顶点的度均小于 3，问图 G 中至少有几个顶点？

8. 设 G 是简单图，证明：$\varepsilon(G) \leqslant \binom{\nu(G)}{2}$，且等式成立，当且仅当 G 为完全图.

9. 证明：

(1) $\varepsilon(K_{m,n}) = mn$；

(2) 如果 G 是简单二部图，则 $\varepsilon \leqslant \frac{\nu^2}{4}$.

10. 证明：若 $G = (X,Y,E)$ 是 k 正则二部图 $(k > 0)$，则 $|X| = |Y|$.

11. 证明题图 1.2 的 (a) 图和 (b) 图同构，(c) 图和 (d) 图不同构. 问 (e) 图和 (f) 图是否同构？（注：其中 (a) 图便是著名的 Petersen 图）

12. 证明：

(1) 若图 G 中有 (u,v) 途径，则 G 中必有 (u,v) 链；

(2) 如果 e 是图 G 的某闭迹中的边，则 e 必是图 G 的某圈中的边.

13. 简单图中最长圈的长度称为图的周长，最短圈的长度称为围长. 求 Petersen 图（题图 1.2(a)）的周长和围长.

14. 证明：

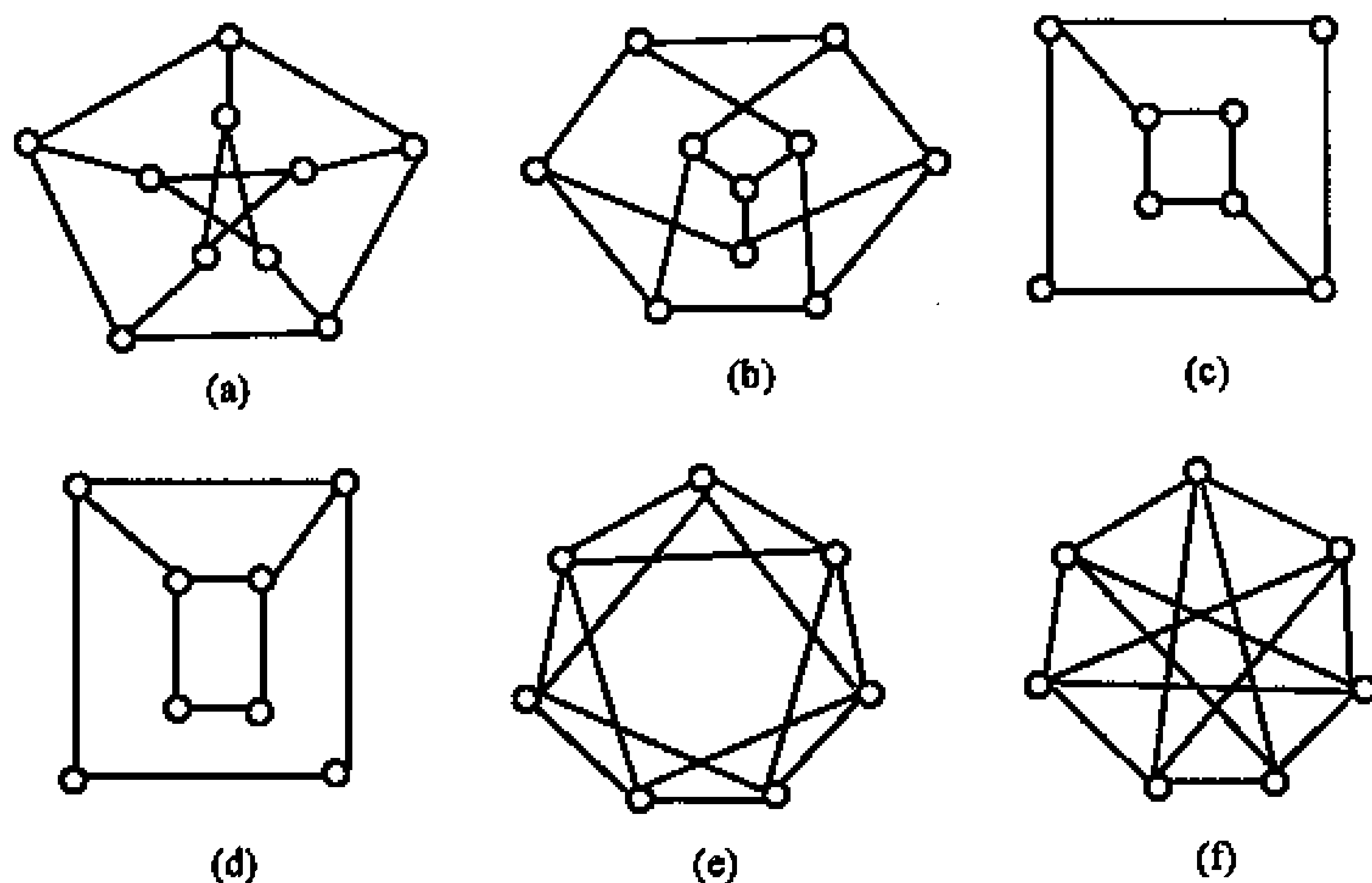
(1) 若图 G 是围长为 4 的 k 正则图，则 $\nu(G) \geqslant 2k$；

(2) 若图 G 是围长 5 的 k 正则图，则 $\nu(G) \geqslant k^2 + 1$.

15. 画出顶点数不超过 8 的全部互不同构的简单 3 正则图.

16. 设 $G = (V,E)$ 是一个 n 阶连通图，且 $|E| = m$，证明：

(1) $m \geqslant n - 1$；



题图 1.2

(2) $m > n-1$，则 G 中至少有一个圈；

(3) 若 $m = n-1$，则 G 中至少有一个顶点的度为奇数．

17．证明：

(1) 如果图 G 是简单图，且 $\delta \geqslant k$，则 G 中必有长为 k 的链；

(2) 若 G 中不含圈，则 G 中必有一个顶点的度小于 2．

18．如果简单图 G 不连通，则 $\delta(G) \leqslant \lfloor \nu(G)/2 \rfloor - 1$（本书中用 $\lfloor x \rfloor$ 表示不超过 x 的最大整数，用 $\lceil x \rceil$ 表示不小于 x 的最小整数）．

19．设 $\nu(G) = n$，$\varepsilon(G) = n+1$，则存在顶点 $v \in V(G)$，使得 $d(v) \geqslant 3$．

20．证明连通图中任何两条最长链必有公共顶点．

21．设图 G 的阶至少为 3，证明：

(1) 对 G 中的任意三个顶点 u, v, w 都有不等式

$$d(u,w) \leqslant d(u,v) + d(v,w);$$

(2) 如果 $d(u,w) \geqslant 2$，则一定有顶点 v 满足

$$d(u,w) = d(u,v) + d(v,w).$$

22．设简单连通图 G 满足 $\delta = k \geqslant 1$，证明 G 中有链 $P = x_1x_2\cdots x_k$，使得 $G - \{x_1, x_2, \cdots, x_k\}$ 连通．

第二章　树

树既是图论中最简单、最重要的一类图，也是应用最广泛的一类图．从许多实际问题中导出的图都是树，例如，同一祖先繁衍的后代按父系血缘关系画出的谱系图就是树，称之为家族树．一类特殊的树 —— 二叉树 —— 是计算机数据结构中的重要内容之一．树，特别是支撑树，可以说是图的骨骼．树的重要性不仅在于它与实际问题有联系，还在于它是最简单的图．当我们无法证明某一猜测时，我们总是用树来作一下验证，看看该猜测对于树是否成立，或者是对于树这类特殊的图，先找一个证法．因此，弄清楚树的性质对进一步研究一般的图具有重要意义．

本章我们将介绍树的性质、树中的顶点和边的特点以及支撑树的计数问题，最后介绍两类应用广泛的树．

2.1　树和森林

不含圈的图称为无圈图(acyclic graph)，连通的无圈图就称为树(tree)．图 2.1.1 给出了所有互不同构的 6 阶树，它们的外形都很像一棵树．因此图论中树的概念也正是从这类图的形象而得名的．

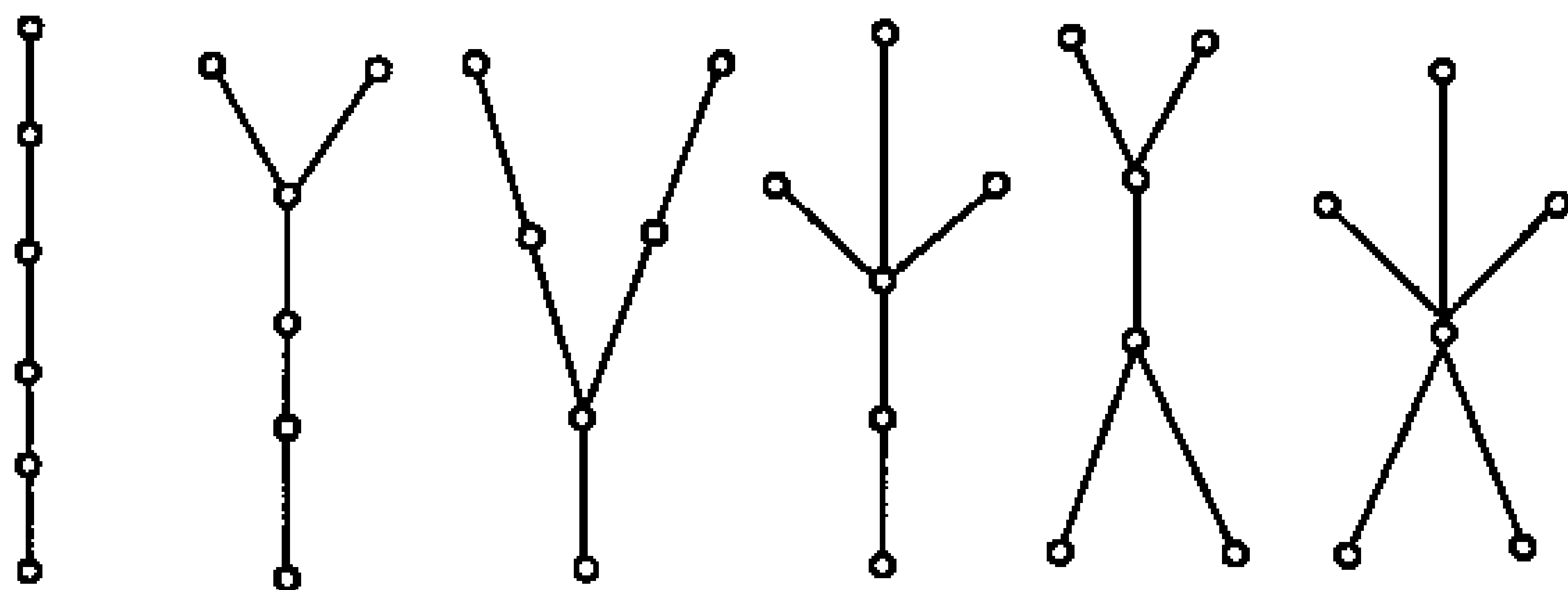


图 2.1.1　所有 6 阶树

因为无圈图的每个连通分支都是树，所以我们又称无圈图为森林(forest)．显然，树和森林都是简单图，也都是二部图．

为了充分认识树的特征，下面我们给出树的等价命题.

定理2.1.1　设 T 是 ν 阶图，下列命题等价.

(1) T 是树；

(2) T 是无环图，且 T 的任何两个顶点间有惟一一条链；

(3) T 是无圈图，且有 $\nu-1$ 条边；

(4) T 是连通图，且有 $\nu-1$ 条边；

(5) T 是连通图，但 $\forall e \in E(T)$，$T-e$ 是非连通图；

(6) T 是无圈图，但添加任何一条后得到的图中将含有惟一的圈.

证明

(1)⇒(2) 设 T 是树，显然 T 中无环. 假设 T 中存在两条不同的(v_1,v_2)链 P_1 和 P_2，则有边 $e=xy\in E(P_1)\setminus E(P_2)$(如图2.1.2). 设 P_1 上的(v_1,x)节与 P_2 的最后一个公共顶点为 u，P_1 上的(y,v_2)节与 P_2 的第一个公共顶点为 w，则 P_1 的(u,w)节 Q_1 与 P_2 的(u,w)节 Q_2 无公共内部点，从而 $Q_1Q_2^{-1}$ 是 T 是的一个圈，矛盾.

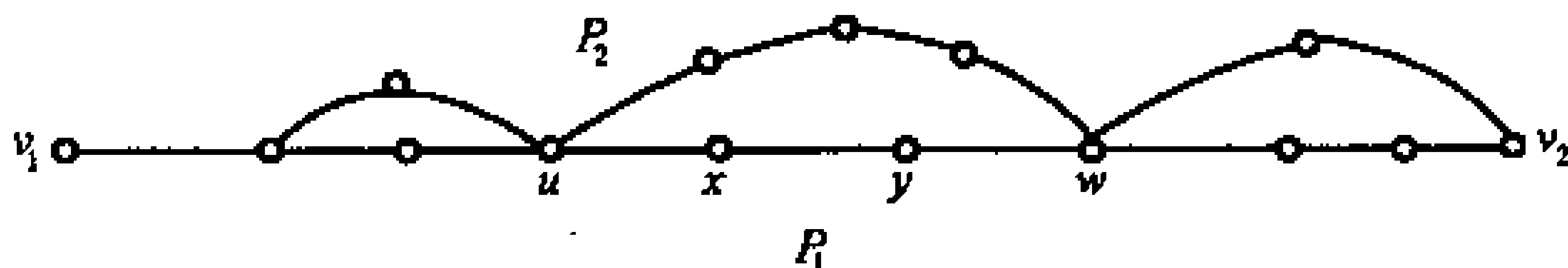


图2.1.2　链 P_1 与 P_2 的关系

(2)⇒(3) 设 T 满足(2)，则 T 是无圈图. 下面对 T 的阶数 ν 用归纳法证明 T 的边数为 $\nu-1$. 当 $\nu=1$ 时，T 是空图，结论成立. 假设 $\nu<k$ 时，结论成立. 现设 $\nu=k\geqslant 2$，$v_1v_2\in E(T)$，则 $T-v_1v_2$ 中不含(v_1,v_2)链，从而 $T-v_1v_2$ 是非连通图，且 $T-v_1v_2$ 恰好有两个连通分支 T_1 和 T_2. 因为 T 是无圈图，所以 T_1 和 T_2 也都是无圈图，从而 T_1 和 T_2 都是树. 由前面知 T_1 和 T_2 都满足(2)，且它们的阶数均小于 k，因此，由归纳假设有 $\varepsilon(T_i)=\nu(T_i)-1\quad(i=1,2)$. 于是有

$$\varepsilon(T)=\varepsilon(T_1)+\varepsilon(T_2)+1=\nu(T_1)+\nu(T_2)-1=\nu(T)-1.$$

(3)⇒(4) 设 T 满足(3)，只需证明 T 连通. 假设 T 的连通分支为 $T_1,\cdots,T_k$，$k\geqslant 2$，易见 T_i 为树$(i=1,\cdots,k)$. 由于已知 $\varepsilon(T_i)=\nu(T_i)-1\quad(i=1,\cdots,k)$，因此，有

$$\varepsilon(T)=\sum_{i=1}^{k}\varepsilon(T_i)=\sum_{i=1}^{k}\nu(T_i)-k=\nu(T)-k<\nu(T)-1,$$

此与 $\varepsilon(T)=\nu(T)-1$ 相矛盾.

(4)⇒(5) 设 T 满足(4)，只须证明：$\forall e\in E(T)$，$T-e$ 是非连通图. 假若 T

$-e$ 连通,当 $T-e$ 不含圈时,$T-e$ 是树,此时 $\varepsilon(T-e)=\nu(T-e)-1$;当 $T-e$ 含圈时,$\varepsilon(T-e)>\nu(T-e)-1$,因此总有

$$\varepsilon(T)=\varepsilon(T-e)+1\geqslant\nu(T-e)=\nu(T),$$

此与 $\varepsilon(T)=\nu(T)-1$ 相矛盾.

(5)⇒(6) 设 T 满足(5),则 T 是无圈图(若 T 中含有圈,则去掉圈上任何一条边仍连通),从而 T 是树.假若添加新边 $e=xy$,$T+xy$ 不含圈,则 $T+xy$ 是树,于是 $\varepsilon(T+xy)=\nu(T+xy)-1=\nu(T)-1$,故

$$\varepsilon(T)=\varepsilon(T+xy)-1=\nu(T)-2,$$

此与 T 是树矛盾,所以 $T+e$ 中含圈.因 T 中不含圈,故 $T+e$ 中任何圈 C 都必含有边 e,则 $C-e$ 是 T 中的 (x,y) 链.又由(2)知 T 中只有一条 (x,y) 链,因此 C 惟一.

(6)⇒(1) 设 T 满足(6),只须证明 T 连通.假若 T 是非连通图,任取 T 的两个连通分支 T_1 和 T_2,设 $v_i\in V(T_i)$,$i=1,2$,则 $T+v_1v_2$ 不含圈,此与(6)矛盾. □

定理2.1.1中的(2)～(6)都与树的定义等价,因此,它们都可以作为树的定义.

我们把删去任何一条边后不再连通的连通图称为极小连通图(minimal connected graph),把添加任何一条边后就含有圈的无圈图称为极大无圈图(maximal acyclic graph).根据定理2.1.1,树等价于极小连通图,也等价于极大无圈图.

推论2.1.2 若树 T 的阶数 $\nu\geqslant2$,则 T 至少有两个悬挂点.

证明 因为 $\nu\geqslant2$,所以 $\forall v\in V(T)$,$d(v)\geqslant1$,由定理1.2.1和定理2.1.1有

$$\sum_{v\in V(T)}d(v)=2\varepsilon(T)=2(\nu(T)-1)=2\nu-2,$$

由上式知 T 至少有两个悬挂点,否则

$$2\nu-2=\sum_{v\in V(T)}d(v)\geqslant1+2(\nu-1)=2\nu-1,$$

得到矛盾. □

推论2.1.3 设 G 有 ν 个顶点,ε 条边,ω 个连通分支,则 G 是森林,当且仅当 $\varepsilon=\nu-\omega$.

证明

(⇒)G 的每个连通分支 $G_i(i=1,\cdots,\omega)$ 都是树,因此由定理2.1.1有 $\varepsilon(G_i)=\nu(G_i)-1$, $i=1,\cdots,\omega$,从而

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{\omega}\varepsilon(G_i) = \sum_{i=1}^{\omega}\nu(G_i) - \omega = \nu - \omega.$$

($\Leftarrow$) 假若 G 不是森林，则 G 含有圈，从而至少存在 G 的一个连通分支含有圈，于是根据定理 2.1.1 中(4)⇒(5) 的证明，对于 G 中任何含有圈的连通分支 G_i，都有 $\varepsilon(G_i) > \nu(G_i) - 1$；对于 G 中任何不含圈的连通分支 G_j，都有 $\varepsilon(G_j) = \nu(G_j) - 1$，因此

$$\varepsilon = \sum_{k=1}^{\omega}\varepsilon(G_k) > \sum_{k=1}^{\omega}(\nu(G_k) - 1) = \nu - w. \qquad \square$$

利用树的性质，可以证明许多有趣的结论.

例 2.1.1(Bondy, 1972)　设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是 $X = \{1, 2, \cdots, n\}$ 的 n 个不同子集，则必存在 $x \in X$，使得 $A_1 \cup \{x\}, A_2 \cup \{x\}, \cdots, A_n \cup \{x\}$ 互不相同.

证明　首先注意到，若 $A, B \subseteq X, A \neq B$，且 $A \cup \{x\} = B \cup \{x\}$，则或者 $A = B \cup \{x\}$，或者 $B = A \cup \{x\}$，因此 A 与 B 的对称差 $A \oplus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{x\}$.

用反证法. 设 $\forall i \in X$，存在 $k = k(i)$ 和 $l = l(i)$，$1 \leqslant k \neq l \leqslant n$，使得 $A_k \cup \{i\} = A_l \cup \{i\}$. 由于 $A_k \neq A_l$，所以 $A_k \oplus A_l = \{i\}$. 构作一个简单图 G，其顶点集 $V(G) = X$，边集 $E(G) = \{k(i)l(i) \mid A_k \oplus A_l = \{i\}, i \in X\}$. 由假设有 $\varepsilon(G) \geqslant n = \nu(G)$. 根据定理 2.1.1 知 G 必不是树，从而 G 中含有圈 $C = i_1 i_2 \cdots i_s i_1$，不妨设 $k(j) = i_j = j$，则有 $i_{j+1} = l(j)$，$j = 1, 2, \cdots, s$，于是有

$$\begin{aligned}\{s\} &= A_1 \oplus A_s \\ &= (A_1 \oplus A_2) \oplus (A_2 \oplus A_3) \oplus \cdots \oplus (A_{s-1} \oplus A_s) \\ &\subseteq \bigcup_{j=1}^{s-1}(A_j \oplus A_{j+1}) = \{1, 2, \cdots, s-1\}.\end{aligned}$$

这显然是一个矛盾，命题得证. $\square$

用类似方法，可以证明必存在 $x \in X$，使得 $A_1 \setminus \{x\}, A_2 \setminus \{x\}, \cdots, A_n \setminus \{x\}$ 互不相同.

2.2　割边

图 G 中使 $\omega(G - e) > \omega(G)$ 的边 e 称为 G 的割边(cut edge). 图 2.2.1 中的边 xy 和 uv 都是割边.

引理 2.2.1　$\forall e \in E(G)$，有

$$\omega(G) \leqslant \omega(G - e) \leqslant \omega(G) + 1; \qquad (2.2.1)$$

并且 e 是 G 的割边，当且仅当 $\omega(G - e) = \omega(G) + 1$.

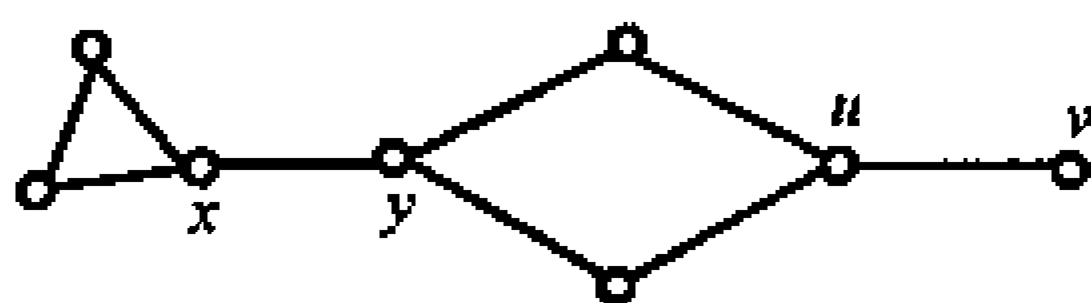


图 2.2.1 割边

证明 G 可视作由 $G-e$ 添加边 e 而得到. 由于在一个图中添加一条边后其连通分支数要么不变,要么减少 1,因此,或者 $\omega(G)=\omega(G-e)$,或者 $\omega(G)=\omega(G-e)-1$,由此即得式(2.2.1).

设 e 是 G 的割边,则 $\omega(G-e)>\omega(G)$,从而由式(2.2.1)知 $\omega(G-e)=\omega(G)+1$;反之,若 $\omega(G-e)=\omega(G)+1$,则由定义知 e 是 G 的割边. □

定理 2.2.2 $e\in E(G)$ 是图 G 的割边,当且仅当 e 不在 G 的任何圈上.

证明

($\Rightarrow$) 设 e 是 G 的割边,则 $\omega(G-e)>\omega(G)$,从而存在 G 的两个顶点 u 和 v 在 G 中连通,而在 $G-e$ 中不连通. 因此 G 中必有一条 (u,v) 链 P 经过 e. 设 $e=xy$,并且在 P 上 x 位于 y 之前,记 P 的 (u,x) 节为 P_1,P 的 (y,v) 节为 P_2. 若 e 在 G 的某个圈 C 上,则 $C-e$ 是 $G-e$ 中的 (x,y) 链 Q,从而 P_1QP_2 是 $G-e$ 中一条 (u,v) 途径,于是 u 和 v 在 $G-e$ 中连通,矛盾.

($\Leftarrow$) 假设 $e=xy$ 不是 G 的割边,则由引理 2.2.1 知,$\omega(G)=\omega(G-e)$. 因为边 xy 是 G 中一条 (x,y) 链,所以 x 和 y 在 G 的同一个连通分支中,从而亦在 $G-e$ 的同一连通分支中,即 $G-e$ 中存在 (x,y) 链 P,于是 $P+e$ 是 G 中的圈,它包含边 e. □

利用割边概念,我们可以把定理 2.1.1(5) 中的结论表述为:T 是树,当且仅当 T 是每条边都为割边的连通图.

如果图 G 的支撑子图 T 是树,则称 T 为 G 的支撑树(spanning tree). 若 G 有支撑树,则由 T 的连通性知 G 必连通. 反之,若 G 连通,则通过去掉 G 的边得到 G 的支撑子图 T,使得 T 是极小连通图,从而 T 是树,即 G 的支撑树. 因此有下面的定理.

定理 2.2.3 图 G 有支撑树,当且仅当 G 连通. □

由定理 2.2.3 知,若 G 为连通图,则 G 必有支撑树,那么如何找出 G 的支撑树呢?我们知道,树是极小连通图,树中不含圈. 若 G 中含有圈 C,则去掉 C 上的任一条边 e,再考察图 $G-e$ 是否还有圈,若有,则继续去掉圈上一边,如此下去,直到所得到的图 G' 中没有圈为止,此时,G' 就为图 G 的支撑树 T. 这种通过删去 G 中圈上的边而得到支撑树的方法,称为破圈法. 其具体步骤如下:

Step0 令 $G_0=G$, $k=0$.

Step1　若 G_k 不含圈,转 Step2;若 G_k 含有圈 C,任取 $e_k \in E(C)$,令 $G_{k+1} = G_k - e_k$,$k := k+1$,重复 Step1.

Step2　结束,G_k 为 G 的支撑树.

因为算法中每个 G_k 都是 G 的连通支撑子图,所以算法结束时得到的 G_k 确是 G 的支撑树.

另外,由于连通图 G 的支撑树 T 也是 G 的极大无圈图,因此,可以得到求连通图 G 的支撑树的另一个算法,称之为避圈法.算法步骤如下.

Step0　令 $E' = E(G)$,$T = (V, \emptyset)$.

Step1　任取 $e \in E'$,若 $T + e$ 含有圈,转 Step2;否则令 $T := T + e$,转 Step2.

Step2　令 $E' := E' \setminus \{e\}$.若 $E' \neq \emptyset$,返回 Step1;否则结束,T 为 G 的支撑树.

例 2.2.1　用破圈法和避圈法求图 2.2.2 中图 G 的支撑树.

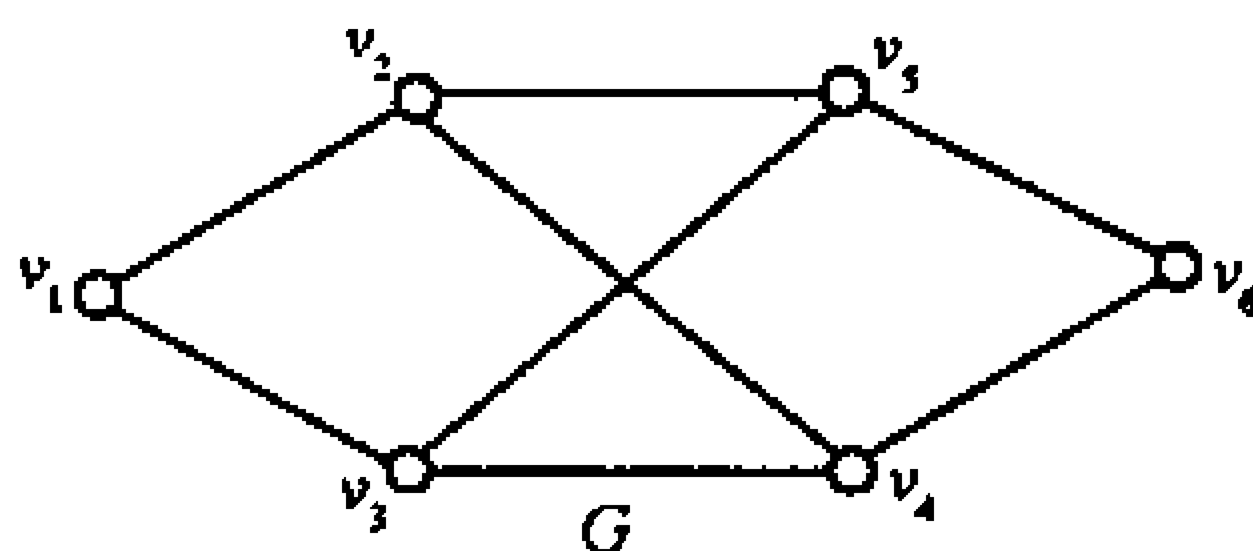


图 2.2.2　求连通图的支撑树

解

(1) 破圈法

取 $G_0 = G$,在 G_0 中取一个圈 $C_1 = v_1v_2v_4v_3v_1$,任取 C_1 上的一边 v_1v_2,令 $G_1 = G_0 - v_1v_2$,见图 2.2.3.

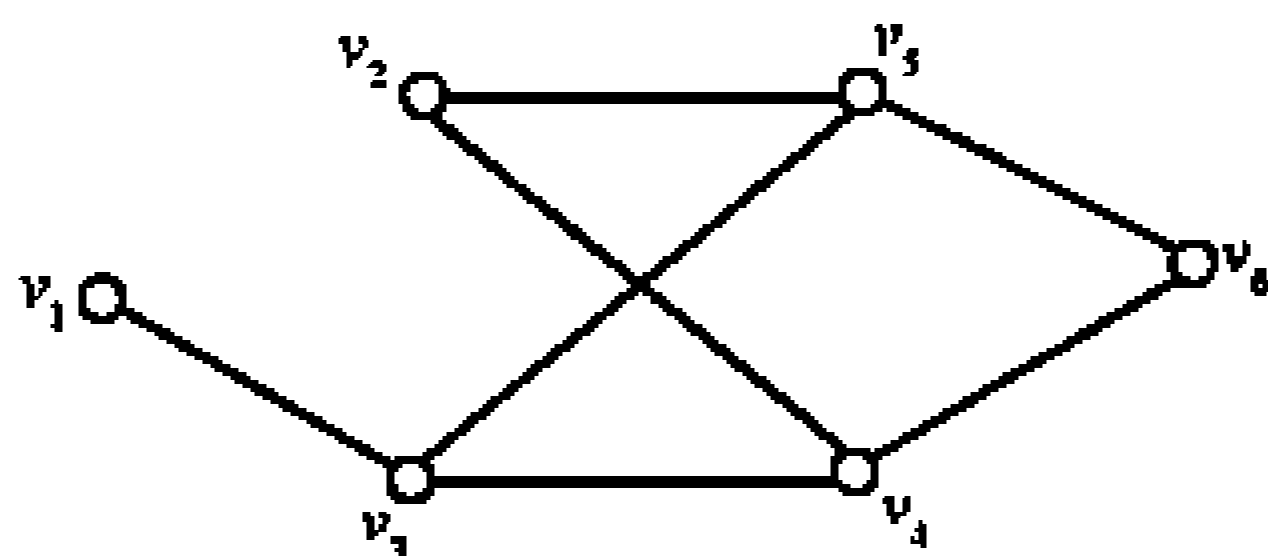


图 2.2.3　破圈法得到 G_1

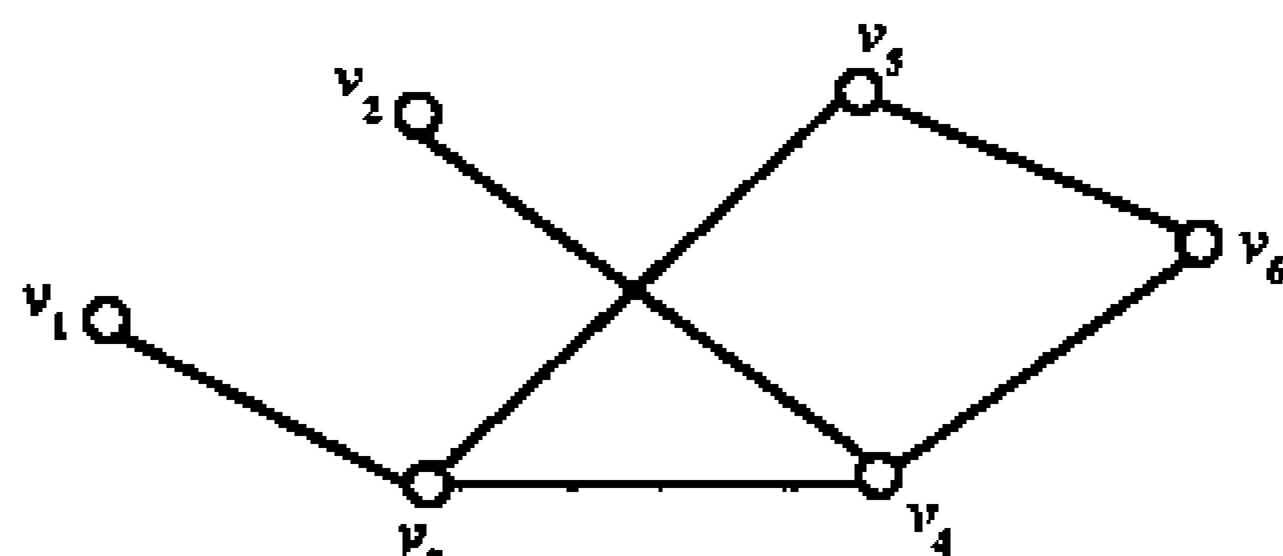


图 2.2.4　破圈法得到 G_2

在 G_1 中任取一个圈 $C_2 = v_2v_5v_3v_4v_2$,任取其上一边 v_2v_5,令 $G_2 = G_1 - v_2v_5$,见图 2.2.4.

在 G_2 中只有一个圈 $C_3 = v_5v_6v_4v_3v_5$,任取其上一边 v_5v_6,令 $G_3 = G_2 - v_5v_6$,见图 2.2.5.

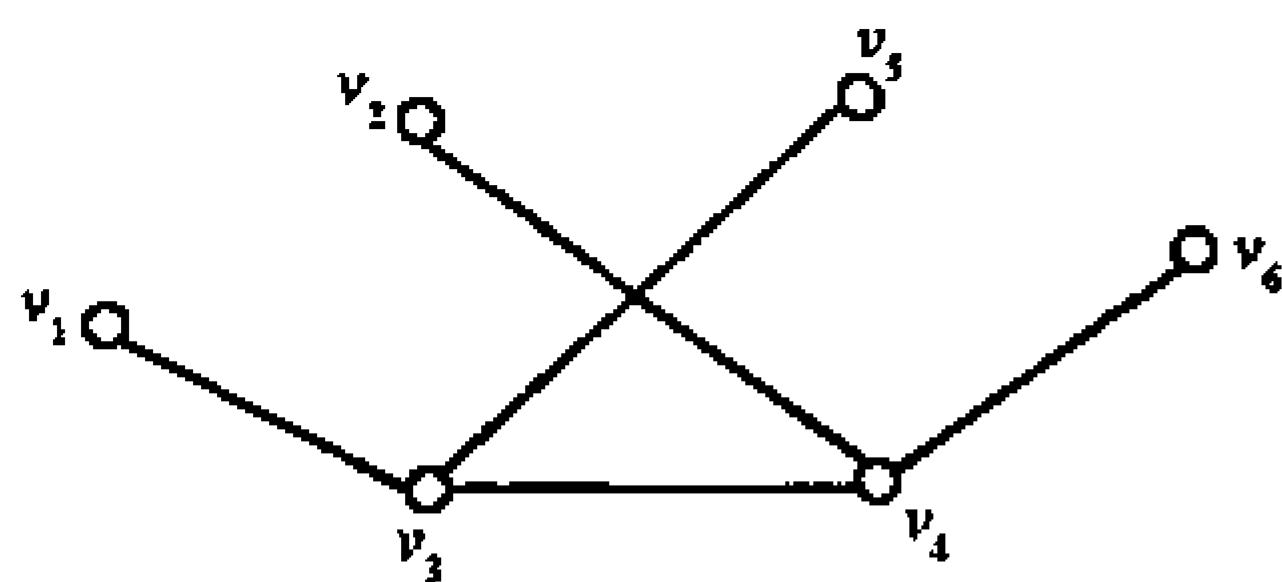
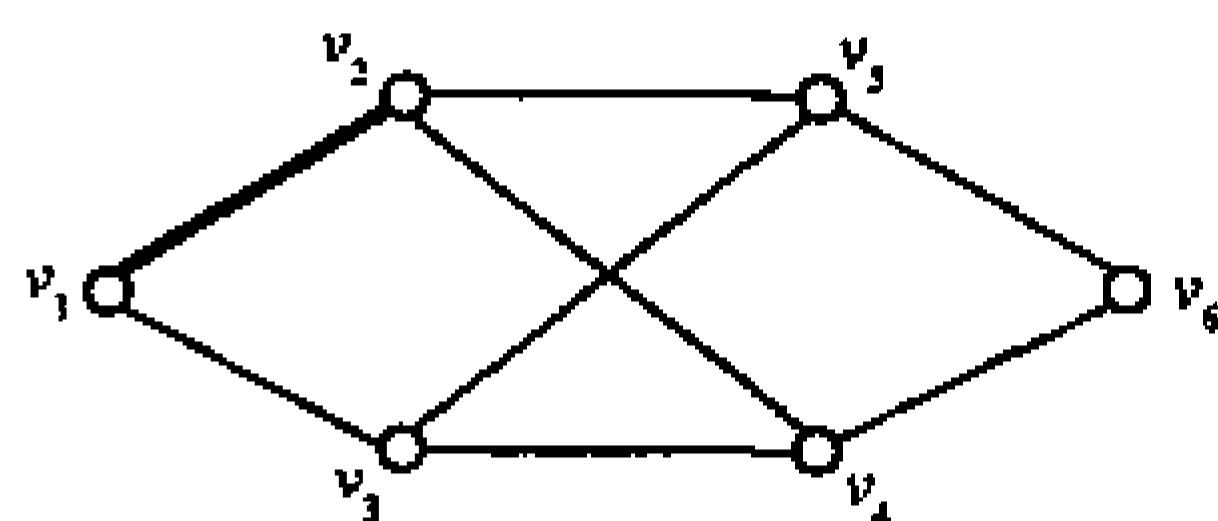


图 2.2.5 破圈法得到 G_3

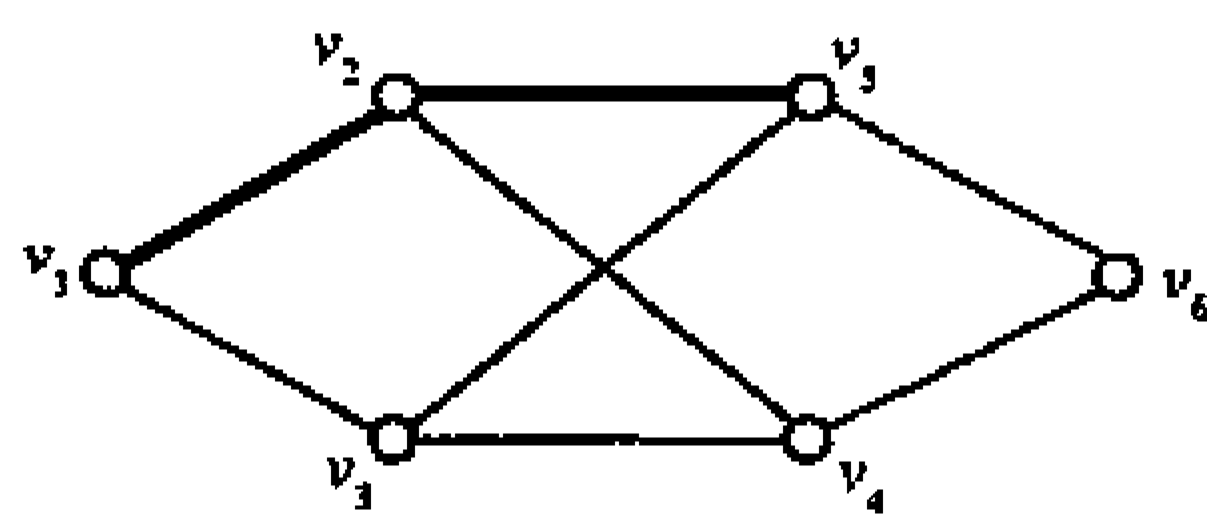
G_3 中没有圈了，故 G_3 就是图 G 的一个支撑树.

不难看出，在用破圈法求图的支撑树时，选择不同的圈，或者去掉圈上不同的边，就会得到不同的支撑树.而且，只要图中有圈，则任选其一，将其“破开”即可，而不必考察图中的所有圈.

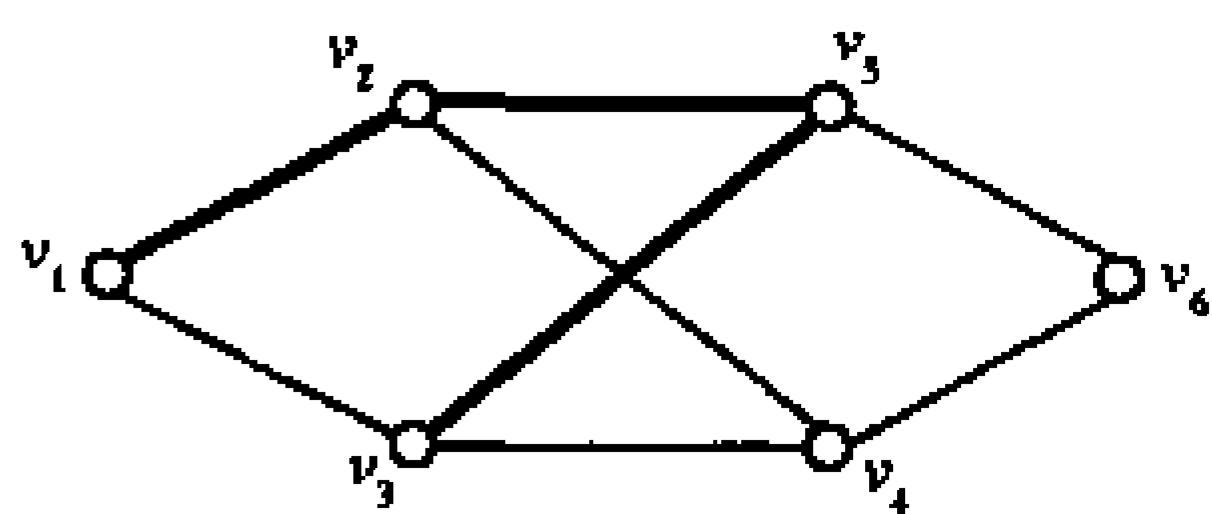
(2) 避圈法



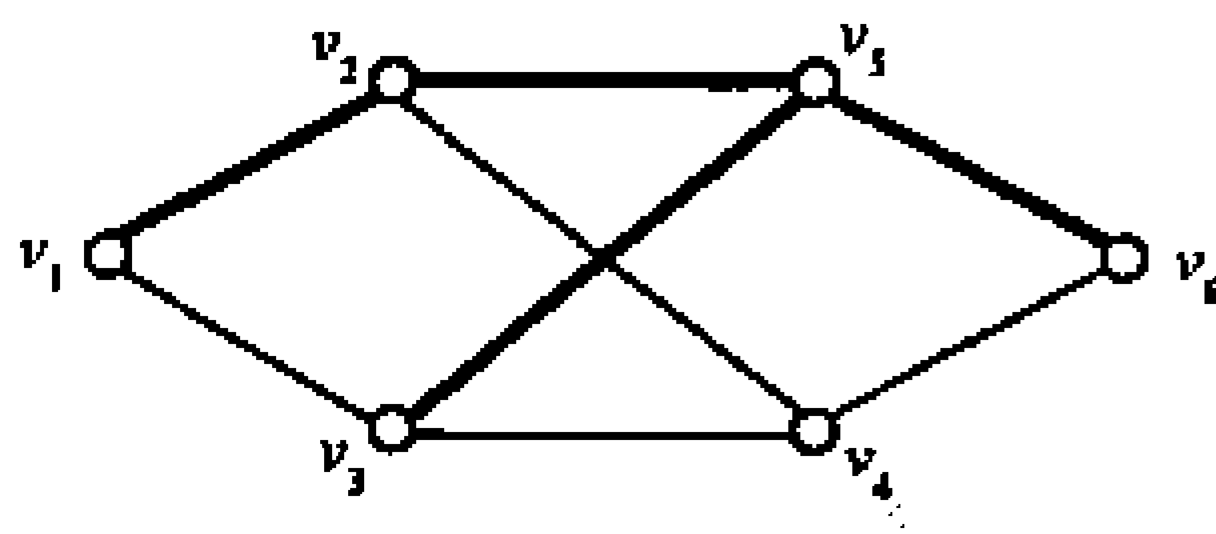
(a)



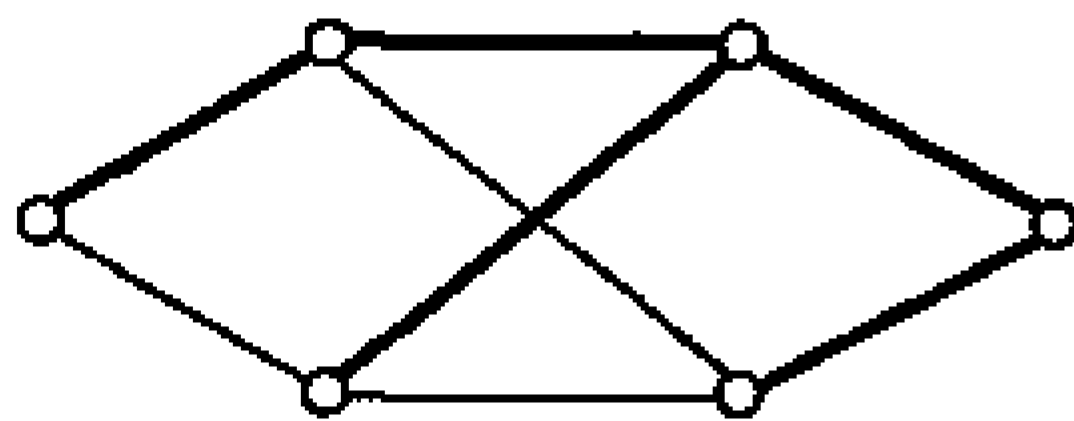
(b)



(c)



(d)



(e)

图 2.2.6 避圈法

图 2.2.6 中，从(a) 图到(e) 图的各个图中用粗线标出来的图表示施行避圈时逐步得到的图，图 2.2.6(e) 中粗线标出的图就是 G 的支撑树.从图中可以看出，再添加任何一条剩下的边，图中就会含有圈了. □

应当指出，当图中边数较少时用破圈法要快一些，当边数较多时则用避圈法

要快一些.而且用破圈法和避圈法找连通图的支撑树时,所得到的支撑树一般不惟一.

2.3　补圈

对于 $V(G)$ 的非空子集 S 和 S',记

$$[S,S'] = \{uv \in E(G) \mid u \in S, v \in S'\}.$$

若 $S \subset V(G), S \neq \emptyset, \bar{S} = V(G) \setminus S$,且 $[S,\bar{S}] \neq \emptyset$,则称 $[S,\bar{S}]$ 为 G 的边割(edge-cut).极小边割(minimal edge-cut)是指这样的边割:它的任一真子集都不再是边割,极小边割又称为补圈(cocycle)或余圈.含有 k 条边的边割称为 k 边割(k-edge-cut).

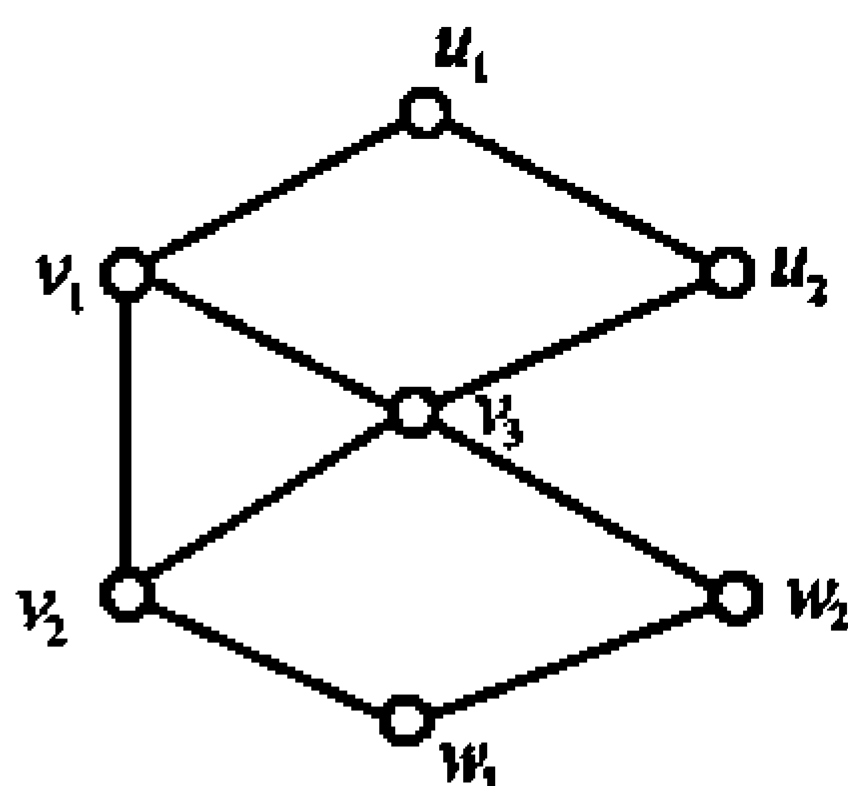


图 2.3.1　边割和补圈

在图 2.3.1 中,取 $S = \{v_1, v_2, v_3\}$,则 $[S,\bar{S}] = \{v_1u_1, v_3u_2, v_3w_2, v_2w_1\}$ 是边割,但不是补圈,因为它的真子集 $\{v_1u_1, v_3u_2\}$ 和 $\{v_3w_2, v_2w_1\}$ 都是边割,也都是极小边割,即都是补圈.

容易知道,若 E' 是 G 的边割,则 $\omega(G-E') > \omega(G)$,但是满足 $\omega(G-E') > \omega(G)$ 的 $E(G)$ 的子集 E' 却不一定是 G 的边割,如在图 2.3.2 中,取 $E' = \{e_1, e_2, e_3\}$,则 $\omega(G-E') > \omega(G)$,但 E' 不能表示成 $[S,\bar{S}]$ 的形式,E' 不是 G 的边割.

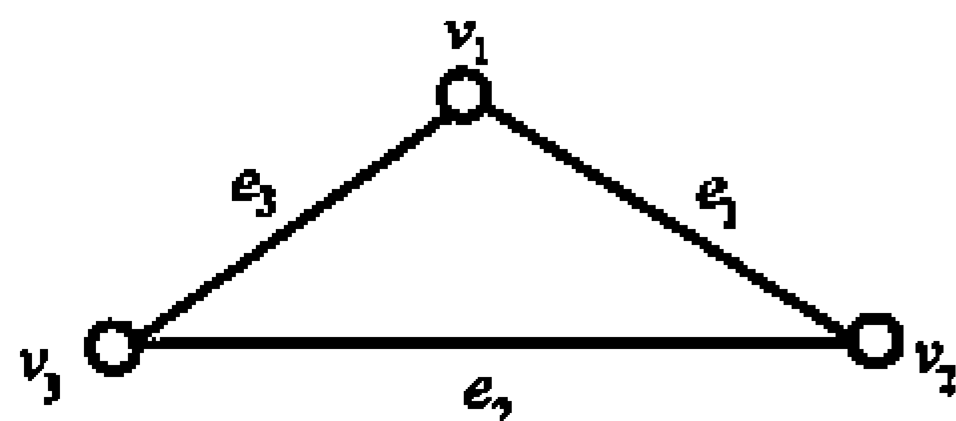


图 2.3.2　满足 $\omega(G-E') > \omega(G)$ 的 E' 不一定是边割

下面的定理刻画了补圈的特征.

定理 2.3.1 设 G 是连通图，则 G 的边割$[S,\bar{S}]$是补圈，当且仅当 $G[S]$ 和 $G[\bar{S}]$ 都连通.

证明

($\Leftarrow$) 因为 $G[S]$ 和 $G[\bar{S}]$ 都连通，所以从连通图 G 中删去$[S,\bar{S}]$ 的任何一个真子集后得到的图仍然连通，因此，$[S,\bar{S}]$ 是 G 的补圈.

($\Rightarrow$) 设$[S,\bar{S}]$是连通图 G 的补圈，若 $G[S]$ 不连通. 设 H 是$G[S]$的一个连通分支，由 G 的连通性知$[V(H),V(G)\setminus V(H)]$是边割，且是$[S,\bar{S}]$的真子集，这与$[S,\bar{S}]$是极小边割相矛盾，若 $G[\bar{S}]$ 不连通，同理，亦可得到矛盾. □

推论 2.3.2 设$[S,\bar{S}]$为图 G 的一个边割，则$[S,\bar{S}]$或者是补圈，或者是一些两两不交的补圈的并.

证明 分两种情况讨论.

(1) G 是连通的.

如果 $G[S]$，$G[\bar{S}]$ 都连通，则由定理 2.3.1 知$[S,\bar{S}]$是补圈. 如果 $G[S]$ 和 $G[\bar{S}]$ 不都连通，不失一般性，设 $G[S]$ 不连通，把 $G[S]$ 的连通分支记为 $H_1,\cdots,H_n$. 设 $G-V(H_i)$ 的各连通分支为 $G_{i1},\cdots,G_{ir_i}$ $(i=1,\cdots,n)$. 由于 G 连通，因此 H_i 与各个 $G_{ij}(1\leqslant j\leqslant r_i)$ 均有边相连，故 $G[\overline{V(G_{ij})}]$ 连通$(1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant r_i)$，如图 2.3.3. 由定理 2.3.1 知$[\overline{V(G_{ij})},V(G_{ij})]$是 G 的补圈，显然，这些补圈互不相交，并且

$$\begin{aligned}\bigcup_{i=1}^{n}\bigcup_{j=1}^{r_i}[\overline{V(G_{ij})},V(G_{ij})] &= \bigcup_{i=1}^{n}\bigcup_{j=1}^{r_i}[V(H_i),V(G_{ij})]\\ &= \bigcup_{i=1}^{n}[V(H_i),\overline{V(H_i)}]\\ &= \bigcup_{i=1}^{n}[V(H_i),\bar{S}] = [S,\bar{S}].\end{aligned}$$

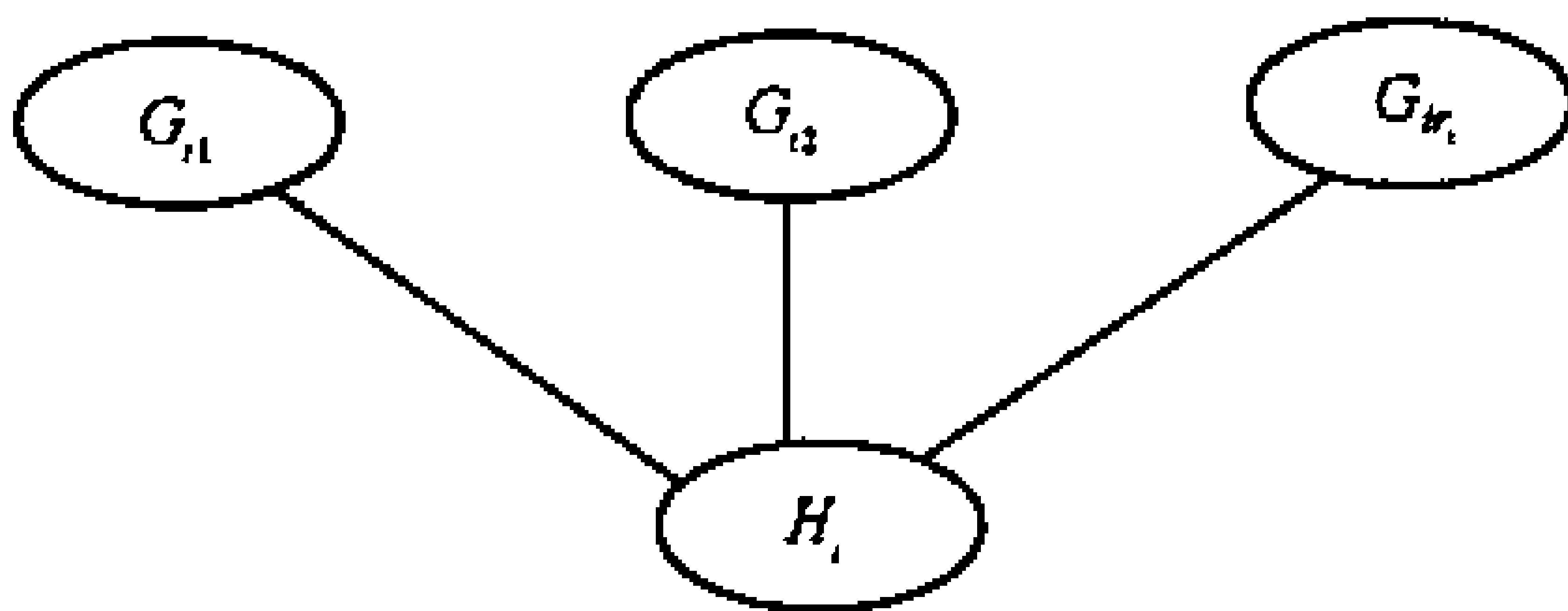


图 2.3.3 H_i 与 G_{ij} 的关系

(2) G 是非连通的.

设 G 的连通分支为$G^{(1)},\cdots,G^{(\omega)}$，令 $S_k=S\cap V(G^{(k)})$，$\bar{S}_k=V(G)\setminus S_k$，$k=1,\cdots,\omega$，显然

$$[S,\bar{S}]=\bigcup_{k=1}^{\omega}[S_k,\bar{S}_k].\qquad(2.3.1)$$

注意到$[S_k,\bar{S}_k]$是G的边割，$k=1,\cdots,\omega$。因此，由(1)知，$[S_k,\bar{S}_k]$可表示为G中若干个不交的补圈的并.于是，由式(2.3.1)知，$[S,\bar{S}]$可表示为G中若干个不交的补圈的并. □

推论2.3.3　设G为连通图，$[S,\bar{S}]$为G的一个边割，且$[S,\bar{S}]=\bigcup_{i=1}^{n}E_i$，其中$E_1,E_2,\cdots,E_n$为$G$的两两不交的补圈，则$G-[S,\bar{S}]$有$n+1$个连通分支.

证明　对n进行归纳.当$n=1$时，由定理2.3.1知，结论成立.假设当$n\leqslant k$时结论都成立，下设$n=k+1$.由于E_1是G的补圈，因此由定理2.3.1，$G-E_1$有两个连通分支G_1和G_2.设补圈$E_2,\cdots,E_n$中有n_1个在G_1中，有n_2个在G_2中，则$n_1+n_2=k$.由归纳假设$G_1-\bigcup_{i=2}^{n}E_i$有n_1+1个分支，$G-\bigcup_{i=2}^{n}E_i$有n_2+1个分支，于是$G-[S,\bar{S}]$有$(n_1+1)+(n_2+1)=k+2$个分支，于是结论亦成立.

□

实际上，若$G-[S,\bar{S}]$有$n+1$个连通分支，由推论2.3.3可知，边割$[S,\bar{S}]$必为n个两两不交的补圈的并.

若H是G的子图，则H在G中的补图(complement)是指G的支撑子图$G-E(H)$，记作$\bar{H}(G)$.特别地，若H是简单图，则把H在$K_{v(H)}$中的补图简称为H的补图，记作$\bar{H}$.若T是G的支撑树，则称$G-E(T)$为G的补树(cotree)，记作$\bar{T}$.我们知道树中不含圈，但添加一条边后，就会含有惟一一个圈.下面的定理指出，补树和补圈之间也有类似的关系.这也是我们把极小边割称为补圈的原因.

定理2.3.4　设T是连通图G的支撑树，$e\in E(T)$，则

(1) 补树$\bar{T}$不含有G的任何补圈；

(2) $\bar{T}+e$含有G的惟一的补圈.

证明

(1) 设B是G的任一补圈，则$G-B$不连通，因而$G-B$不包含T，即B必有一些边在T中，故B不包含在$\bar{T}$中.

(2) 由定理2.1.1(5)和引理2.2.1知，$T-e$是由两个树T_1和T_2组成的，根据定理2.3.1知，$B=[V(T_1),V(T_2)]$是G的补圈，它显然包含在$\bar{T}+e$之中.$\forall b\in B$，因$T-e+b$连通，且$\varepsilon(T-e+b)=\nu(G)-1$，故$T-e+b$是$G$的支撑树.因此，包含在$\bar{T}+e$中的$G$的任何补圈$B'$必定包含$b$，否则$G-B'$包含支撑树$T-e+b$，即知$G-B'$连通，此与$B'$是补圈相矛盾.所以$B\subseteq B'$，由补圈的极小性可知$B=B'$.于是$\bar{T}+e$中含有$G$的惟一的补圈. □

2.4 割点

本节我们来介绍树上顶点的性质.在图 2.4.1 中,图 G_1 是树,若去掉顶点 x

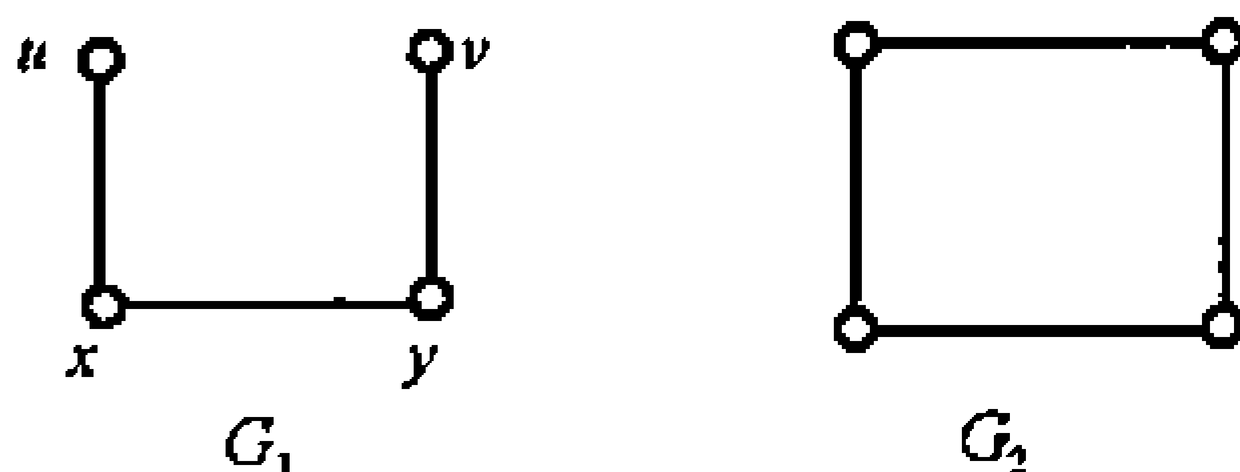


图 2.4.1 树上顶点的性质

或去掉顶点 y,则树 G_1 就不再连通;而图 G_2 不是树,且去掉其上任何一个顶点,G_2 仍然连通.如果图 G 的边集 E 可以分划成两个非空子集 E_1 和 E_2,使 $G[E_1]$ 和 $G[E_2]$ 有惟一的公共顶点 v,则称 v 为 G 的割点(cut vertex).因此在图 2.4.1 中,顶点 x 和顶点 y 是 G_1 的割点,而 u 和 v 则不是;G_2 中的任何顶点都不是割点.一般地,关于割点有如下结论.

引理 2.4.1 若顶点 v 满足 $\omega(G-v) > \omega(G)$,则 v 是 G 的割点.反之,若 G 的割点 v 上无环,则 $\omega(G-v) > \omega(G)$.

证明 设 v 满足 $\omega(G-v) > \omega(G)$,且 v 是 G 的连通分支 H 中的一个顶点,把 $H-v$ 的连通分支记为 $H_1,\cdots,H_k$,由假设知 $k \geqslant 2$.令

$$E_1 = E(H_1) \cup \{uv \in E(H) \mid u \in V(H_1)\},E_2 = E(G) \setminus E_1.$$

显然,E_1,E_2 是 $E(G)$ 的一个划分,且 $E_1 \neq \emptyset, E_2 \neq \emptyset$,$G[E_1]$ 和 $G[E_2]$ 有惟一的公共顶点 v,从而 v 是 G 的割点.

设 v 是 G 的割点,且 v 上无环,v 是 $G[E_1]$ 和 $G[E_2]$ 的惟一公共顶点,这里 E_1,E_2 是 $E(G)$ 的非空划分.因 v 上无环,故存在连杆 $vu_1 \in E_1$,$vu_2 \in E_2$,即 u_1 和 u_2 在 G 的同一个连通分支中.由于 v 是 $G[E_1]$ 和 $G[E_2]$ 的惟一公共顶点,因此 G 中所有 (u_1,u_2) 链必定经过 v.于是 u_1 和 u_2 分属 $G-v$ 的不同连通分支,即 $\omega(G-v) > \omega(G)$. □

需要指出的是,若 G 的割点 v 上有环,则 $\omega(G-v) > \omega(G)$ 不一定成立.如图 2.4.2,图中,v_1 为 G 的割点,且 $\omega(G-v_1) = \omega(G)$.

定理 2.4.2 树 T 的顶点 v 是割点,当且仅当 $d(v) > 1$.

证明

($\Rightarrow$) 若 $d(v) = 0$,则树 T 只能是 1 阶完全图,故 v 不是割点.若 $d(v) = 1$,则 $T-v$ 仍是无圈图,且有 $\varepsilon(T)-1$ 条边,从而有 $\nu(T)-2 = \nu(T-v)-1$ 条

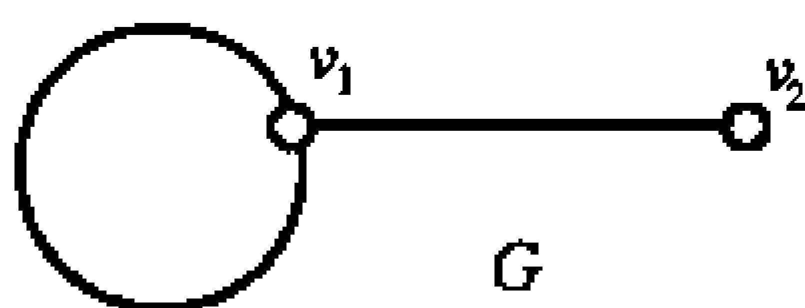


图 2.4.2　割点

边，$T-v$ 是树，所以 $\omega(T-v)=\omega(T)$，由引理 2.4.1 知 v 不是割点.

($\Leftarrow$) 若 $d(v)>1$，则 T 中存在两个相异的顶点 u 和 w 与 v 相邻，链 uvw 是树 T 中惟一的 (u,w) 链，由此知，$T-v$ 中不再有 (u,w) 链，故 $\omega(T-v)>1=\omega(T)$，由引理 2.4.1 知 v 是 G 的割点. □

推论 2.4.3　任何无环的非平凡连通图中至少有两个顶点不是割点.

证明　设 G 是无环的非平凡连通图，由定理 2.2.3 知，G 有一个非平凡的支撑树，根据推论 2.1.2 知，T 至少有两个悬挂点，再由定理 2.4.2 知，T 至少有两个顶点不是割点.

设 v 不是 T 的割点，则 $\omega(T-v)=\omega(T)=1$，因为 T 是 G 的支撑树，所以 $T-v$ 是 $G-v$ 的支撑子图，从而 $\omega(G-v)\leqslant\omega(T-v)$. 于是 $\omega(G-v)=1$，而 G 是无环图，由引理 2.4.1 知，v 不是 G 的割点. 由于 T 至少有两个这样的点，故 G 至少有两个顶点不是割点. □

从推论的证明过程可以看到支撑树的重要作用，正是因为我们注意到结论对图 G 的支撑树 T 成立，才最终证明该结论对非平凡连通图也成立. 事实上，对于一般的非连通无环图，我们有：若无环图 G 有 ω 个非平凡的连通分支，则可断言 G 中至少有 2ω 个顶点不是割点.

2.5　支撑树的计数

一般说来，连通图 G 的支撑树是不惟一的，除非它本身就是树. 如例 2.2.1 中，我们用破圈法和避圈法求支撑树时，得到的支撑树就不一样. 一个自然的问题是：对一个连通图 G，如何确定它的支撑树的数目呢？

设 G 为顶点标号图，以 $\tau(G)$ 表示图 G 的不同支撑树的个数. 这里"不同的支撑树"指的是两个树的边集不完全相同，尽管两个树可能是同构的，但只要它们的边集不同，它们就是不同的支撑树. 图 2.5.1 给出了三阶完全图 G 及其全部不同的支撑树 T_1，T_2 和 T_3.

设 $e=uv$ 是图 G 的一条连杆，在 G 中去掉 e，把顶点 u 和 v 合并为一个新顶点，而除 e 外，G 中一切与 u 或 v 关联的边都改为与新顶点关联，并且图中其他的顶点和边以及它们的关联关系保持不变，这样得到的新图称为在图 G 中收缩

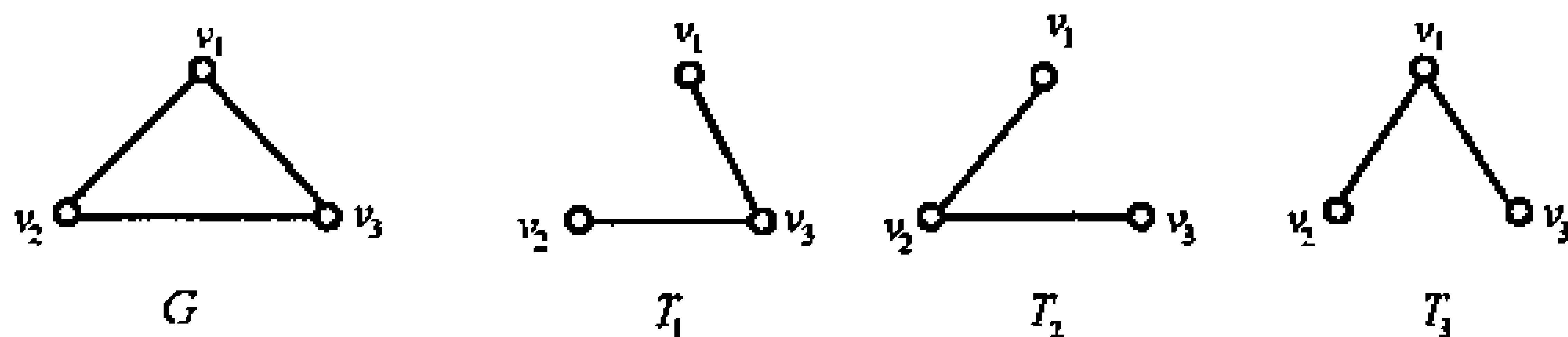


图 2.5.1　图的不同支撑树

(contract) 边 e 后得到的图，记为 $G \cdot e$. 图 2.5.2 给出了图的收缩运算.

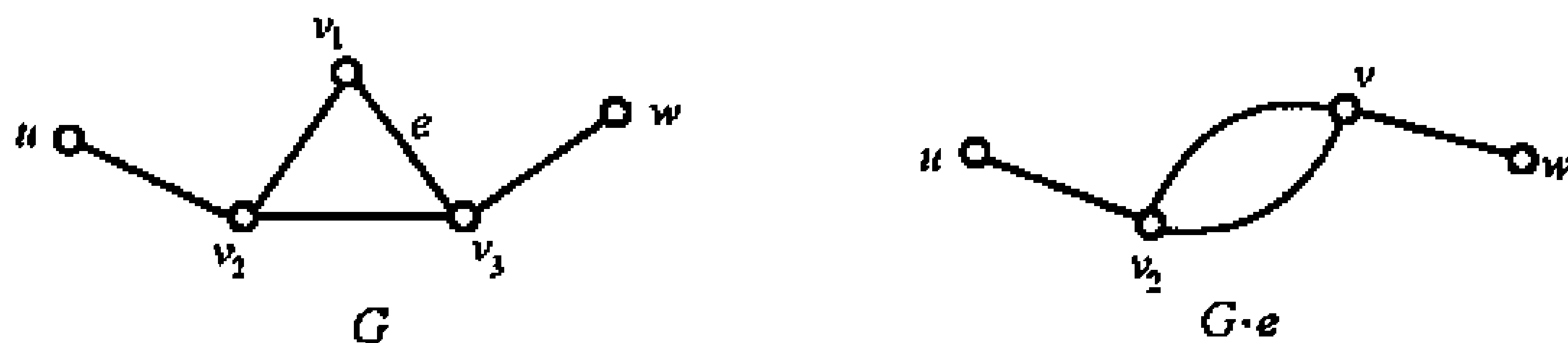


图 2.5.2　图的收缩运算

利用收缩运算，我们有如下求 $\tau(G)$ 的递推公式.

定理 2.5.1　设 e 是 G 的连杆，则 $\tau(G) = \tau(G-e) + \tau(G \cdot e)$.

证明　把 G 的支撑树分为两类：第一类含有边 e，第二类不含有边 e. 显然，第二类支撑树与 $G-e$ 的支撑树一一对应，即第二类支撑树的个数为 $\tau(G-e)$.

设 T 是第一类支撑树，注意到 $T \cdot e$ 仍然是树，故 $T \cdot e$ 是 $G \cdot e$ 的支撑树；反过来，设 $e = v_1v_2$，对 $G \cdot e$ 的支撑树，只要把 e 收缩而得的新顶点用链 v_1ev_2 代替，即得 G 的含边 e 的支撑树，从而第一类支撑树与 $G \cdot e$ 的支撑树一一对应，即第一类支撑树的个数为 $\tau(G \cdot e)$，因此 $\tau(G) = \tau(G-e) + \tau(G \cdot e)$. □

下面利用定理 2.5.1 来递推计算 $\tau(G)$. 为了简洁，图的支撑树的个数就用图来表示，并省略了图中各顶点的标号.

例 2.5.1　求图 2.5.3 中图 G 的支撑树的个数 $\tau(G)$.

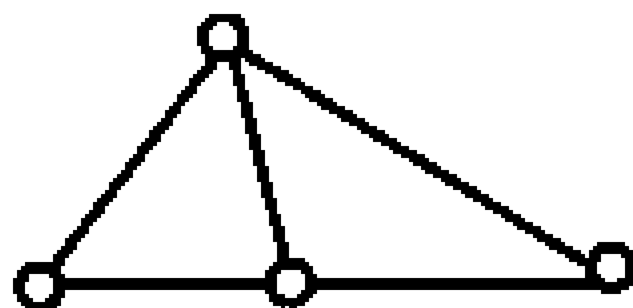


图 2.5.3　求图的支撑树个数的例子

解　求图 2.5.3 中支撑树的个数的过程如图 2.5.4 所示，即 $\tau(G) = 1+2+2+3 = 8$. □

定理 2.5.1 给出了计算支撑树数目的一种方法，但对顶点和边数较多的图，这种方法十分繁杂，并不实用. 在第九章中，我们将给出利用行列式来计算 $\tau(G)$ 的方法. 英国数学家 Cayley 得到了计算 $\tau(K_n)$ 的一个简单公式：

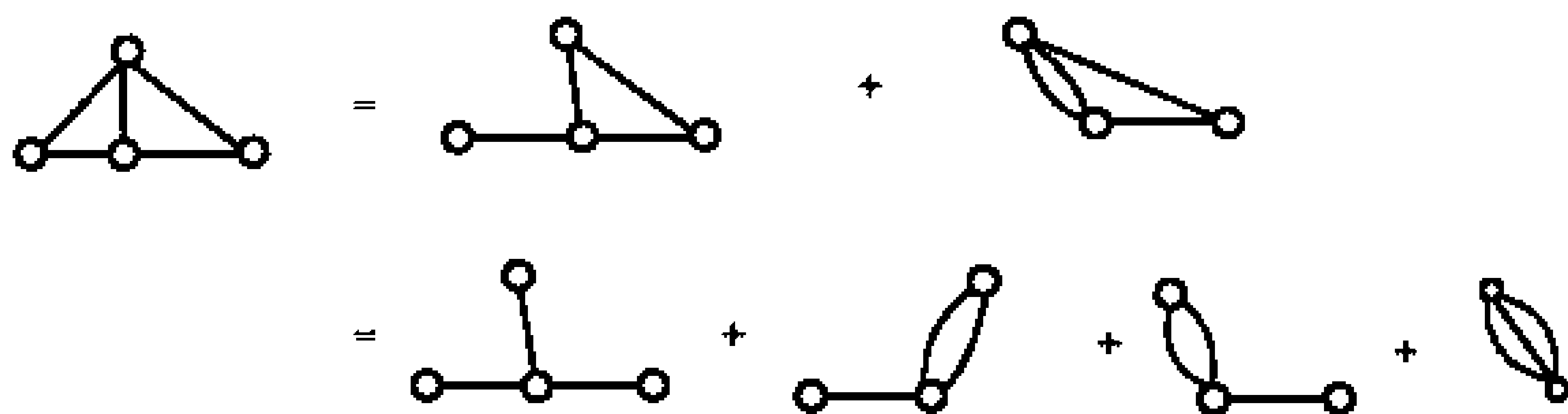


图 2.5.4　求图的支撑树个数的过程

定理 2.5.2(Cayley,1889)　$\tau(K_n) = n^{n-2}$.

证明　当 $n = 1,2$ 时,定理显然成立.下设 $n \geqslant 3$.设 $N = \{1,2,\cdots,n\}$ 为 K_n 的顶点集.当每个 $a_i(1 \leqslant i \leqslant n-2)$ 都从 N 中取值时,共有 n^{n-2} 个不同的序列 $(a_1,a_2,\cdots,a_{n-2})$.因此,如果能够建立 K_n 的支撑树与这种序列之间的一一对应关系,定理就得到了证明.

设 T 为 K_n 的一个支撑树,T 中标号最小的悬挂点为 b_1,则 b_1 有惟一相邻的顶点 a_1.从 T 中除去顶点 b_1,假定由此得到的 $n-1$ 阶标号树中最小的悬挂点为 b_2,惟一与 b_2 相邻的顶点为 a_2.除去 b_2 得到一个 $n-2$ 阶树,设这个树中标号最小的悬挂点为 b_3,惟一与 b_3 相邻的顶点为 a_3.依此下去,直到剩下两个顶点为止,这就得到了序列 $(a_1,a_2,\cdots,a_{n-2})$.例如设 $n = 8$,如图 2.5.5 所示.

反过来,从序列 $(a_1,a_2,\cdots,a_{n-2})$ 也可以求出和它对应的支撑树.首先容易看出,T 中度为 $d_T(v)$ 的顶点在 $(a_1,a_2,\cdots,a_{n-2})$ 中共出现 $d_T(v)-1$ 次,而悬挂点则不会出现在 $(a_1,a_2,\cdots,a_{n-2})$ 中.于是可按照下面的方法从 $(a_1,a_2,\cdots,a_{n-2})$ 中构造 T.记 b_1 是不在 $(a_1,a_2,\cdots,a_{n-2})$ 中出现的标号最小的顶点,在 a_1 与 b_1 之间连上一条边,设 b_2 是 $N\setminus\{b_1\}$ 中不属于 $\{a_2,\cdots,a_{n-2}\}$ 的标号最小的顶点,在 a_2 和 b_2 间连边,这样进行下去直至连出 $n-2$ 条边 $a_1b_1,a_2b_2,\cdots,a_{n-2}b_{n-2}$,最后用边连接 $N\setminus\{b_1,\cdots,b_{n-2}\}$ 中的两个顶点 b_{n-1},b_n,我们断言,这样得到的图就是树 T.事实上,此时 T 中有 n 个顶点、$n-1$ 条边,且无环,由 T 中边的构造易知 b_1 为 T 的悬挂点,故 b_1 不在 T 的任何圈上,而 b_2 则是 $T-b_1$ 的悬挂点,故 b_2 也不在任何圈上,依次下去,可知 T 中任何顶点都不在圈上,即 T 中无圈,故 T 必为树.以序列(3,3,3,1,4,4)为例,依次得到的边为 23,53,63,31,14,74,48,这样得到的树正是图 2.5.5 中与(3,3,3,1,4,4)对应的树.

综上所述,从 K_n 的任一支撑树 T 出发,可以造出它对应的序列,这个序列按照上面的规则反过来又可造出与它对应的支撑树,显而易见,这个支撑树正是原先的支撑树 T,因此,以上建立了支撑树与序列之间的对应关系是一一对应,从而定理得证.　□

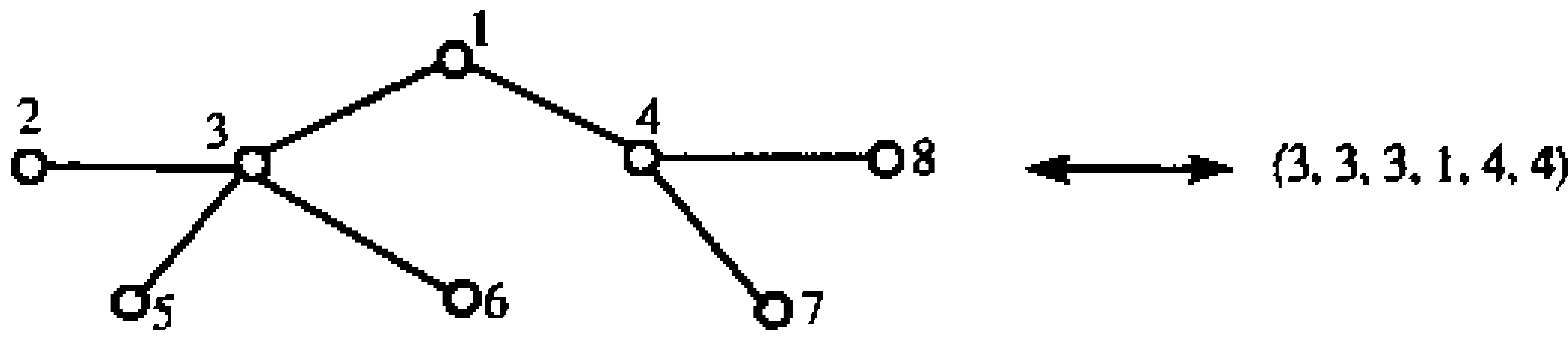


图 2.5.5 K_8 的支撑树与序列之间的一一对应关系

由 Cayley 公式可以看出，随着阶数 n 的增长，n 阶完全图K_n 的支撑树的数目增长速度是相当惊人的，3 阶完全图只有 3 个不同的支撑树，K_4 有 16 个支撑树，K_6 有 1296 个支撑树，而 K_{10} 则有 10^8 个支撑树，也就是说，一个小小的 10 阶完全图，它所包含的不同的支撑树竟有一亿个. 值得注意的是，这些不同的支撑树中有许多都是同构的，实际上，10 阶图的互不同构的支撑树只有 106 个. 如何求连通图 G 的互不同构的支撑树的数目问题是比较复杂的，我们将在第十章介绍相关内容.

2.6 两类常用树

本节介绍两类常用树 —— 有序二元树和 Huffman 树，它们在计算机数据结构中有重要应用.

2.6.1 有序二元树

设 T 是一个树，给 T 的每条边规定一个方向. 若 $e = uv$ 的方向是从 u 指向 v 的，则 u 叫做e 的尾(tail)，v 叫做e 的头(head). 用 $d^-(v)$ 表示以 v 为头的边数，用 $d^+(v)$ 表示以 v 为尾的边数，显然 $d^-(v) + d^+(v) = d_T(v)$. 若给 T 的每条边规定一个方向后，存在一个顶点 v_0，使 $d^-(v_0) = 0$，而其余顶点 v 满足 $d^-(v) = 1$，则称 T 为根树(rooted tree)，称 v_0 为 T 的根(root)，称满足 $d^+(v) = 0$ 的顶点为 T 的叶子. 图 2.6.1(a) 给出了一棵根树，其中 v_0 为根，v_1, v_3, v_4, v_5 都

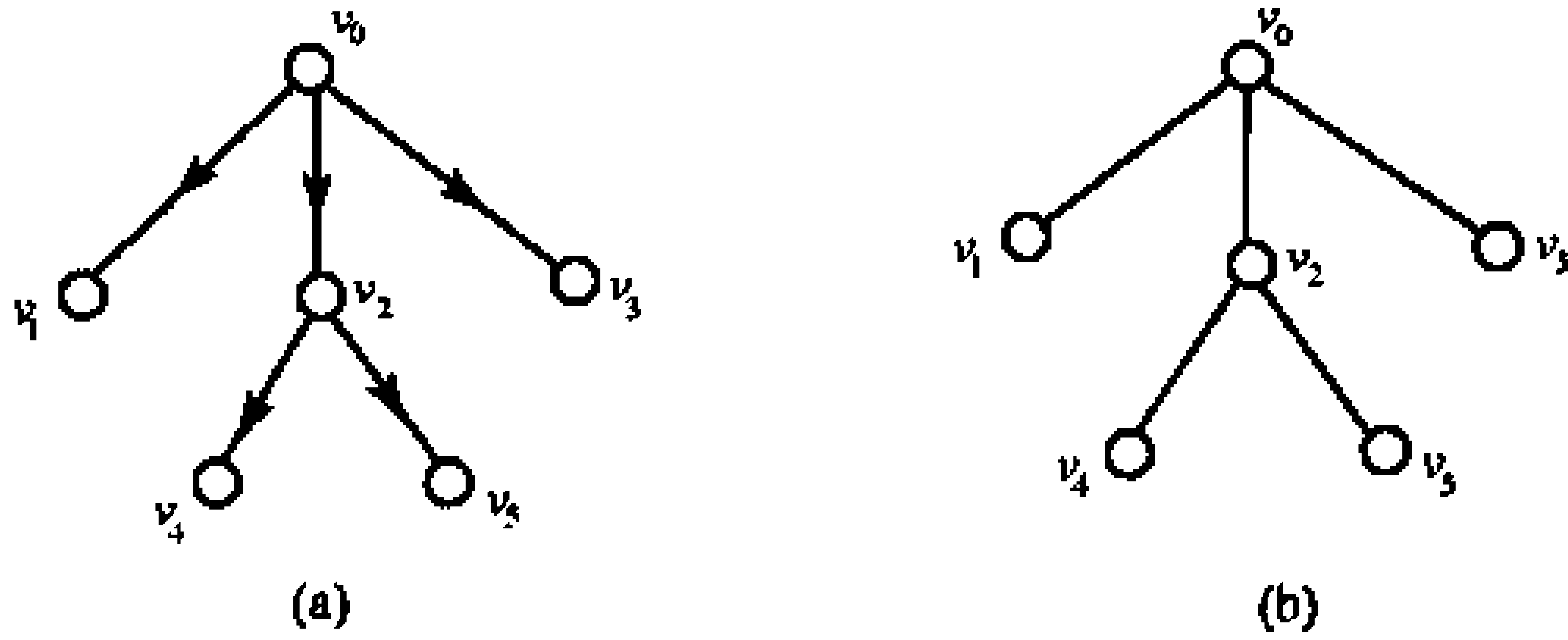


图 2.6.1 根树

是叶子，通常我们习惯于把根树的根顶点画在最上方，由于边的方向都是一致的，因此当明确根后，边的方向均可省去，即可用图2.6.1(b)来代替图2.6.1(a).

设 T 为根树，$\forall v \in V(T)$，$d^+(v) \leqslant n$，则称 T 为 n 元树. 若 $e = uv$ 的方向是从 u 指向 v 的，则称 u 为 v 之父，称 v 为 u 之子，同父之子称为兄弟. 除叶子外，每个顶点皆有 n 个儿子的根树，称为典型 n 元树. 另外，若根树的每个顶点的儿子们有序时，则称之为有序树.

有序二元树是一种重要的树形结构，从每个顶点向下至多有两个分支，分别把这两个分支称作该顶点的左子树和右子树. 若我们特别规定，在有序二元树中"左下方是儿子，右下方是兄弟"，则可以把任何有序树转化为有序二元树. 图2.6.2(a)为有序树，图2.6.2(b)是与之相应的有序二元树. v_0 有三个儿子 v_1, v_2, v_3，v_1 是长子，在相应的二元树中 v_1 应画在 v_0 的左下方，v_2 和 v_3 作为 v_1 的兄弟，依次将 v_2 画在 v_1 的右下方，将 v_3 画在 v_2 的右下方；v_1 有1个儿子 v_4，故 v_4 应画在 v_1 的左下方；v_2 有3个儿子 v_5, v_6, v_7，长子 v_5 应画在 v_2 的左下方，而 v_6 则应画在 v_5 的左下方，v_7 作为 v_6 的兄弟应画在 v_6 的左下方.

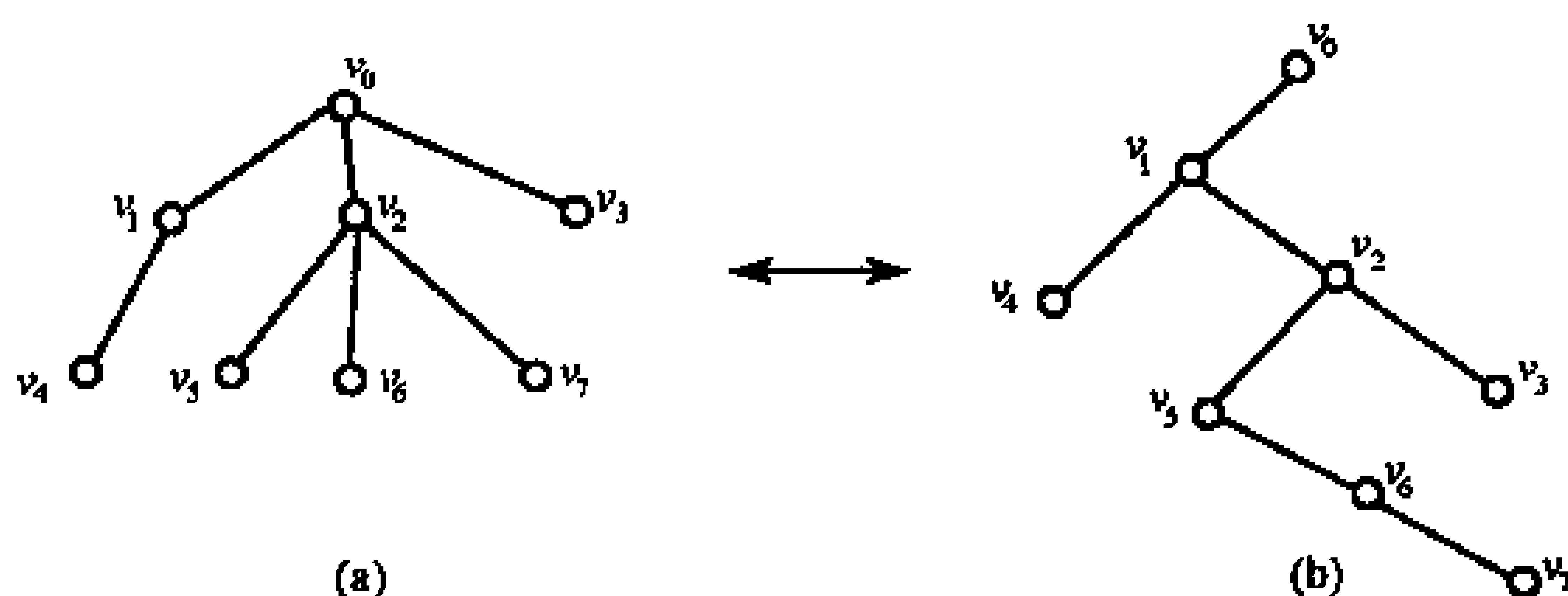


图 2.6.2　有序树与二元有序树间的转化

按"左下方是儿子，右下方是兄弟"的规则，我们不仅可以把有序树与有序二元树相互转化，而且还可以实现多个有序树与一个有序二元树之间的相互转化，这时，我们只需把各个有序树的根也看成是兄弟即可，见图2.6.3.

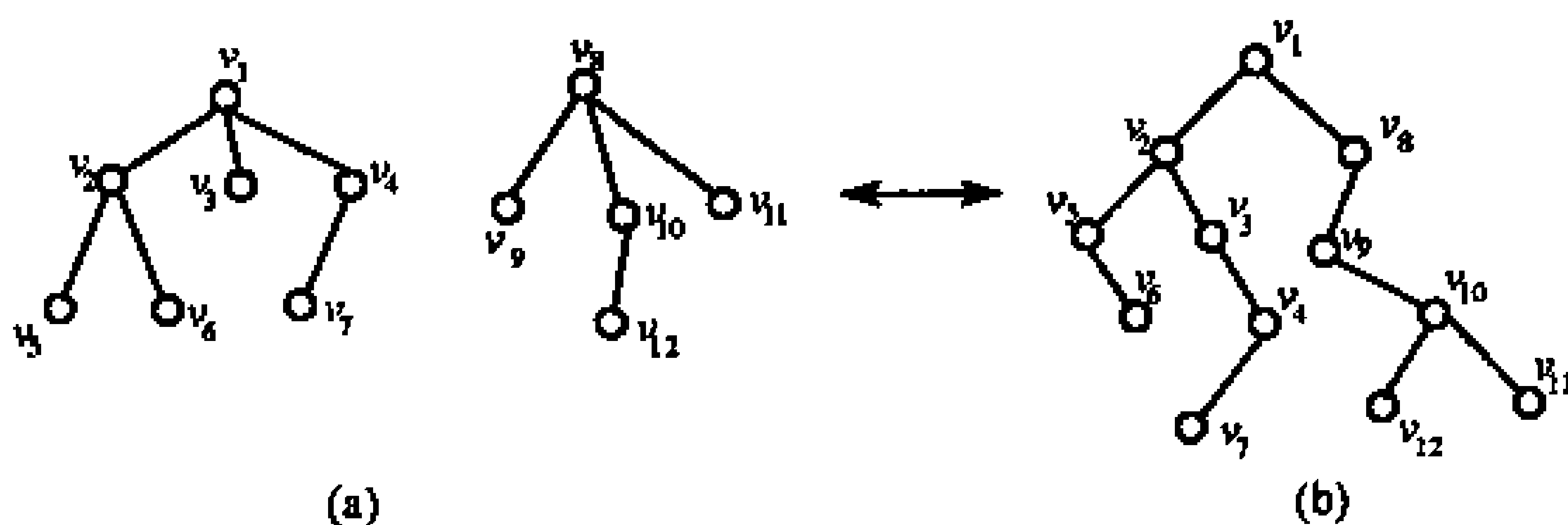


图 2.6.3　多个有序树与一个二元有序树间的转化

2.6.2 有序二元树的个数

n 阶有序二元树是多种多样的，但肯定是有限的，一个自然的问题是由 n 个顶点究竟能构造出多少个顶点无标号且结构不同的有序二元树. 例如 3 个顶点能构造出 5 个有序二元树，如图 2.6.4 所示.

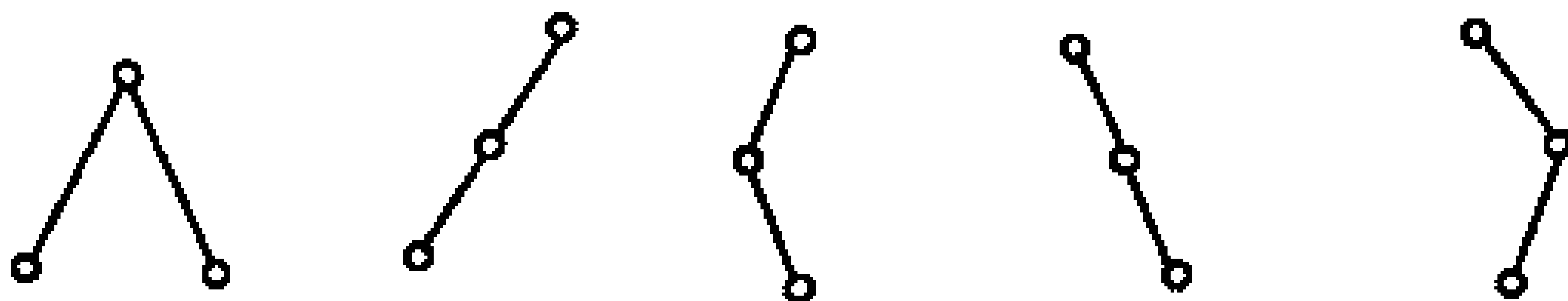


图 2.6.4 全体 3 阶有序二元树

为求 n 阶有序二元树的个数，我们介绍如下好括号列的概念.

括号列是指由左括号“(”和右括号“)”组成的有限序列，而好括号列是指

(1) 空列是好的；

(2) 若 A 与 B 是好括号列，则 AB 也是；

(3) 若 A 是好括号列，则 (A) 也是；

(4) 除了上述(1)，(2)，(3) 中的括号列外，再无其他好括号列.

不是好括号列者，则是坏括号列，例如(()(())) 是好括号列，而(()))(() 则是坏括号列.

引理 2.6.1 一个括号列是好括号列的充要条件是它由偶数个括号组成，其中左括号和右括号各占一半，且从左向右读这个括号列时，任何时刻读出的右括号个数不会超过读出的左括号个数.

证明

(⇒) 若括号列是好括号列，则显然它必是由左括号和右括号各占一半的偶数个括号组成的. 下面对括号个数用归纳法证明，从左至右读出的右括号个数不会超过左括号的个数. 若括号数为 2，则显然有一个左括号和一个右括号，结论成立. 设 m 个左括号和 m 个右括号组成的好括号列命题已真，我们考虑 n 个左括号和 n 个右括号组成的好括号列 $(n > m)$，分两种情形考虑.

(a) 若造此括号列时，最后一步是(3)，则命题显然成立.

(b) 若造此括号列时，最后一步是(2)，此括号列形如 AB，A 与 B 皆为非空好括号列，从左至右读时，只要还在读 A，由归纳假设，读出的左括号不比右括号少，当我们读到 A 的最后一个括号时，读出的左、右括号个数一样，再读下去，即读 B，由归纳假设，读出的右括号总数仍然不会超过读出的左括号总数.

(⇐) 仍用归纳法.

若括号数为2,则只有一个左括号和一个右括号,命题显然成立.假设 $m < n$ 时,若 m 个左括号和 m 个右括号组成的括号列,满足从左至右读时读出的左括号个数不少于右括号个数,则此括号列是好括号列.考虑 n 个左括号 n 个右括号的括号列,从左向右读时,若读了 $2m$ 个括号后,读得的左括号数和右括号数相等,则由归纳假设,读出的这个子列 A 是好括号列,右面未读的子列 B 也满足命题条件,由归纳假设,B 亦为好括号列,所以整个括号列形如 AB,故也是好括号列.

另一方面,若从左向右读时,在未读完所有括号时,读得的左括号数和右括号数总不相等.由已知条件,读的第一个括号必是左括号,读到只剩一个括号未读时,已读出的左括号不比右括号少,而左、右括号各占总数的一半,故最后一个括号必然是右括号,于是整个括号列形如(A),A 满足命题条件,由归纳假设,A 是好括号列,故(A) 亦是好括号列. □

下面我们来求由 $2n$ 个括号组成的好括号列个数.

定理 2.6.2　由 $2n$ 个括号组成的好括号列个数是

$$c(n+1) = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n},$$

这个 $c(n+1)$ 叫做 Catalan 数.

证明　设 $P_1P_2\cdots P_{2n}$ 是 n 个左括号 n 个右括号构成的坏括号列.由引理 2.6.1 知,从左至右读该括号列时,必有某时刻使右括号比左括号多,设 $P_1P_2\cdots P_j$ 的右括号比左括号多,且 j 最小,这时右括号只比左括号多 1 个,把从 P_{j+1} 开始的每个括号"翻"过来(即把左括号改为右括号,且同时把右括号改为左括号),则得 $n-1$ 个左括号 $n+1$ 个右括号的坏括号列,显然这一变换是可逆的,故 n 个左括号与 n 个右括号组成的坏括号列与 $n-1$ 个左括号 $n+1$ 个右括号组成的括号列一一对应.而 $n-1$ 个左括号 $n+1$ 个右括号组成的括号列共计 $\binom{2n}{n+1}$ 个,n 个左括号 n 个右括号组成的括号列共计 $\binom{2n}{n}$ 个,所以 $2n$ 个括号组成的好括号列共有

$$\begin{aligned}\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} &= \frac{1}{n!}2n(2n-1)\cdots(2n-n+1) \\ &\quad - \frac{1}{(n+1)!}2n(2n-1)\cdots(2n-n) \\ &= \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.\end{aligned}$$ □

n 阶有序二元树的数目恰好也是 Catalan 数 $c(n+1)$.这就是下面的定理.

定理 2.6.3　n 阶有序二元树的个数为 $c(n+1)$.

证明 把有序二元树的根顶点标以( ),我们知道在有序二元树中,相邻两顶点的关系可能是父子关系,也可能是兄弟关系,对于父子关系标以(( )),对于兄弟关系则标以( )( ).这样我们就建立了 n 阶有序二元树与 $2n$ 个括号组成的好括号列之间的一一对应,如图 2.6.5 所示.所以由定理 2.6.2 知,n 阶有序二元树的个数是 Catalan 数 $c(n+1)$. □

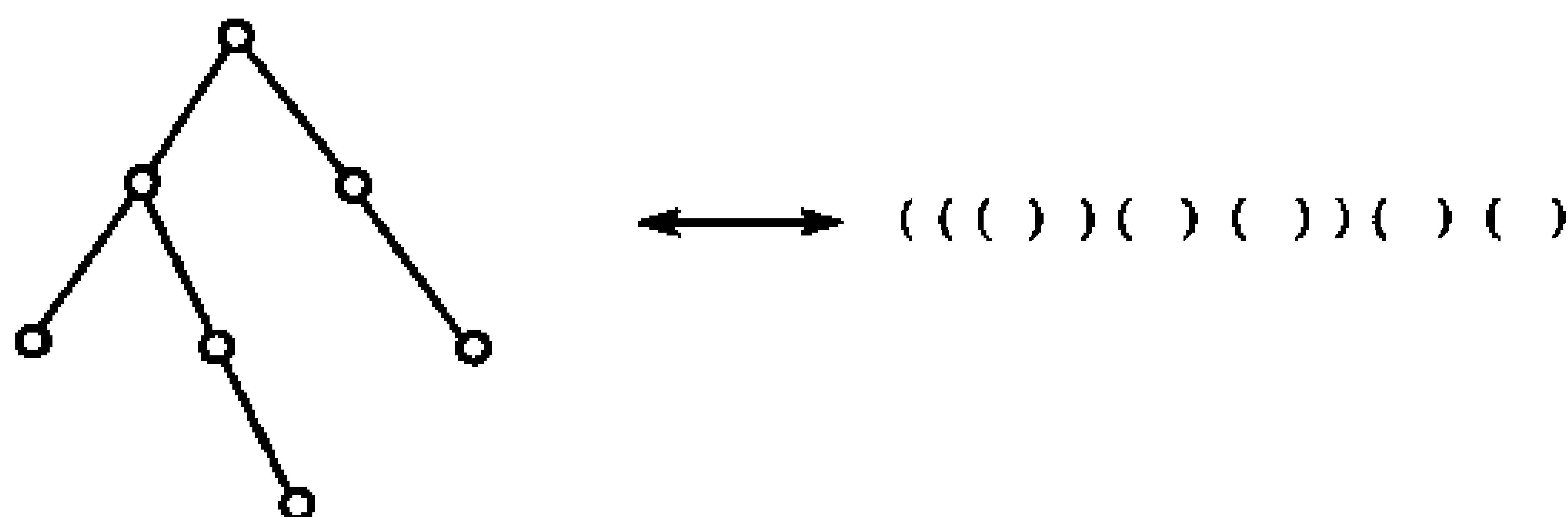


图 2.6.5 有序二元树与好括号列

我们注意到,典型有序二元树中叶子顶点数 $L(T)$ 与非叶子顶点数 $I(T)$ 之间满足 $L(T) = I(T) + 1$,而 $L(T) + I(T) = n$,故对于 n 阶典型有序二元树,其叶子顶点共有 $\frac{1}{2}(n+1)$ 个,去掉 n 阶典型有序二元树的 $\frac{1}{2}(n+1)$ 个叶子顶点,则得到一个 $\frac{1}{2}(n-1)$ 阶有序二元树.实际上,n 阶典型有序二元树与 $\frac{1}{2}(n-1)$ 阶有序二元树是一一对应的,从而由定理 2.6.3 立即得到如下推论.

推论 2.6.4 n 阶典型有序二元树的个数为 $c(\frac{n+1}{2})$ 个. □

另外,我们知道,按"左下方是儿子,右下方是兄弟"的规则,任何一个有序树都可用有序二元树表示.同时注意到,这个有序二元树的根顶点总是没有右子树,由此可知,n 阶有序树与 $(n-1)$ 阶有序二元树之间存在一一对应关系.图 2.6.6 给出了全部 5 个 4 阶有序树,它们分别与图 2.6.4 中所示的 5 个 3 阶有序二元树一一对应.因此,我们有

推论 2.6.5 n 阶有序树的个数 $c(n)$. □

2.6.3 Huffman 树

在计算机通信中,我们常用二进制编码表示字符.例如可用 000,001,010,011,100 分别表示字母 e,l,h,i,o.画一个有序二元树,父子关系为 0,兄弟关系为 1,即左为 0,右为 1,则{000,001,010,011,100}对应的有序二元树如图 2.6.7 所示,则 0－1 密码 010011 表达的信息是 Hi,而 0－1 密码 010000001001100 表达的

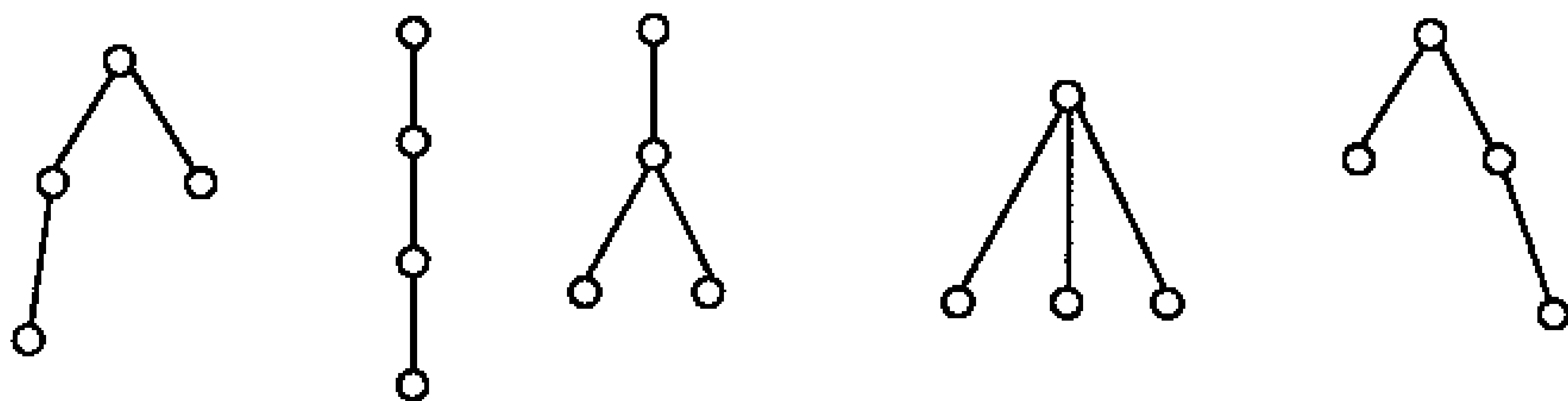


图 2.6.6　全体 4 阶有序树

信息则是 Hello.

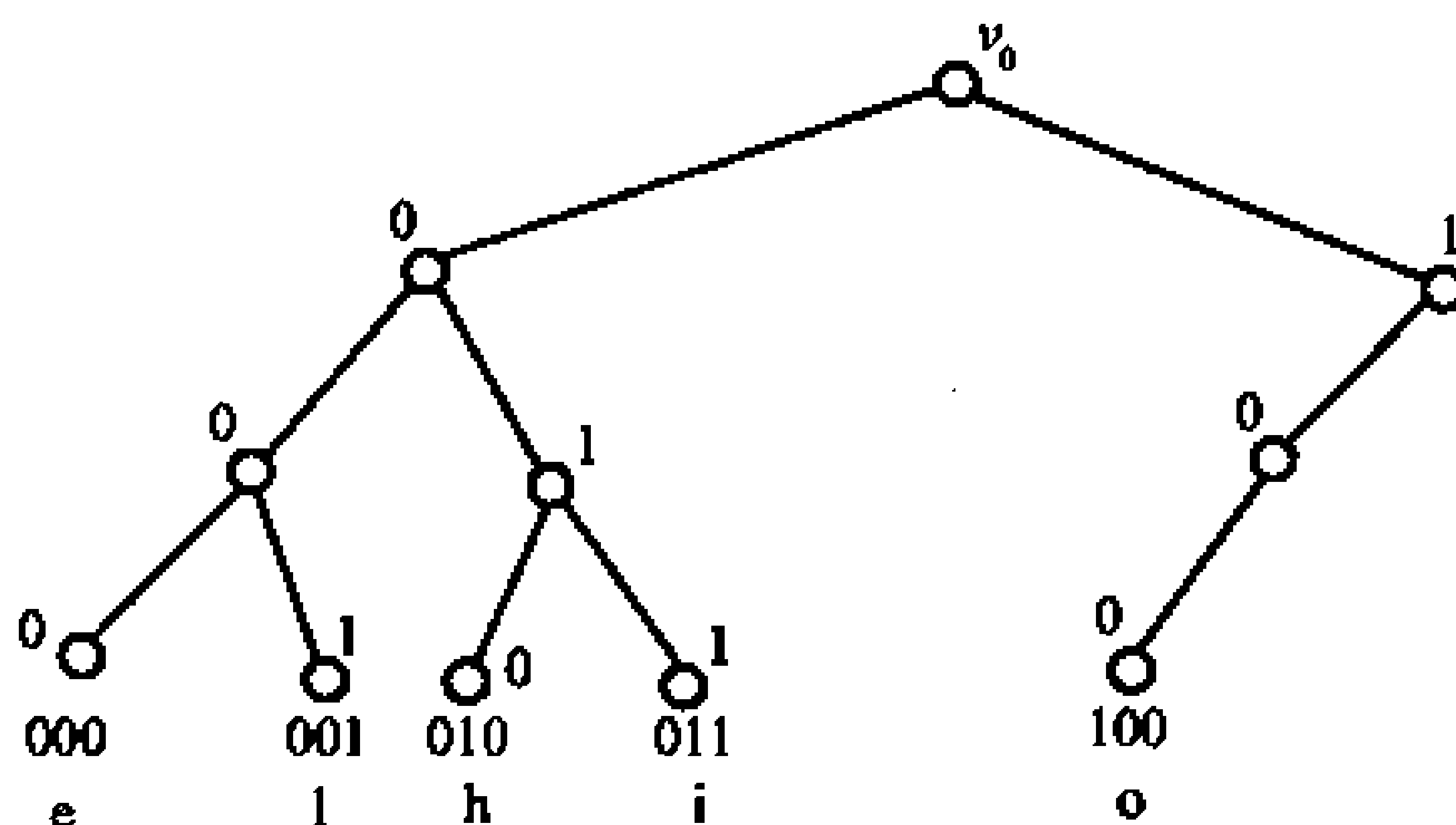


图 2.6.7　{000,001,010,011,100} 对应的有序二元树

若设计一个有 26 个叶子的有序二元树，每个叶子代表一个英文字母，则可以用这个二元树上的叶码序列表示出任何一句话，进而，可以表达任何一篇文章的信息．当然，我们希望使用频率高的字母相应的叶码短一点，而使用频率低的字母相应的叶码则可以长一点儿，这样可以使整篇文章的总叶码长较短．

以 v_0 为根、以 $v_1,\cdots,v_n$ 为叶子的有序二元树中，称 (v_0,v_i) 链的长 l_i 为叶子 v_i 的码长．若 v_i 代表的事物出现的概率为 p_i，且 $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$，则称使

$$m(T) = \sum_{i=1}^{n} p_i l_i$$

达到最小的有序二元树 T 为带权 $p_1,\cdots,p_n$ 的 Huffman 树，也叫做最优二元树．

例 2.6.1　图 2.6.8 中所示的两个树 T_1 和 T_2 都是带权为 0.1,0.2,0.3,0.4 的有序二元树，它们的权分别为

$$m(T_1) = 3(0.4 + 0.1) + 2 \cdot 0.2 + 0.3 = 2.2,$$

$$m(T_2) = 2(0.1 + 0.2 + 0.3 + 0.4) = 2.$$

可见，$m(T_2) < m(T_1)$，即 T_2 优于 T_1．　□

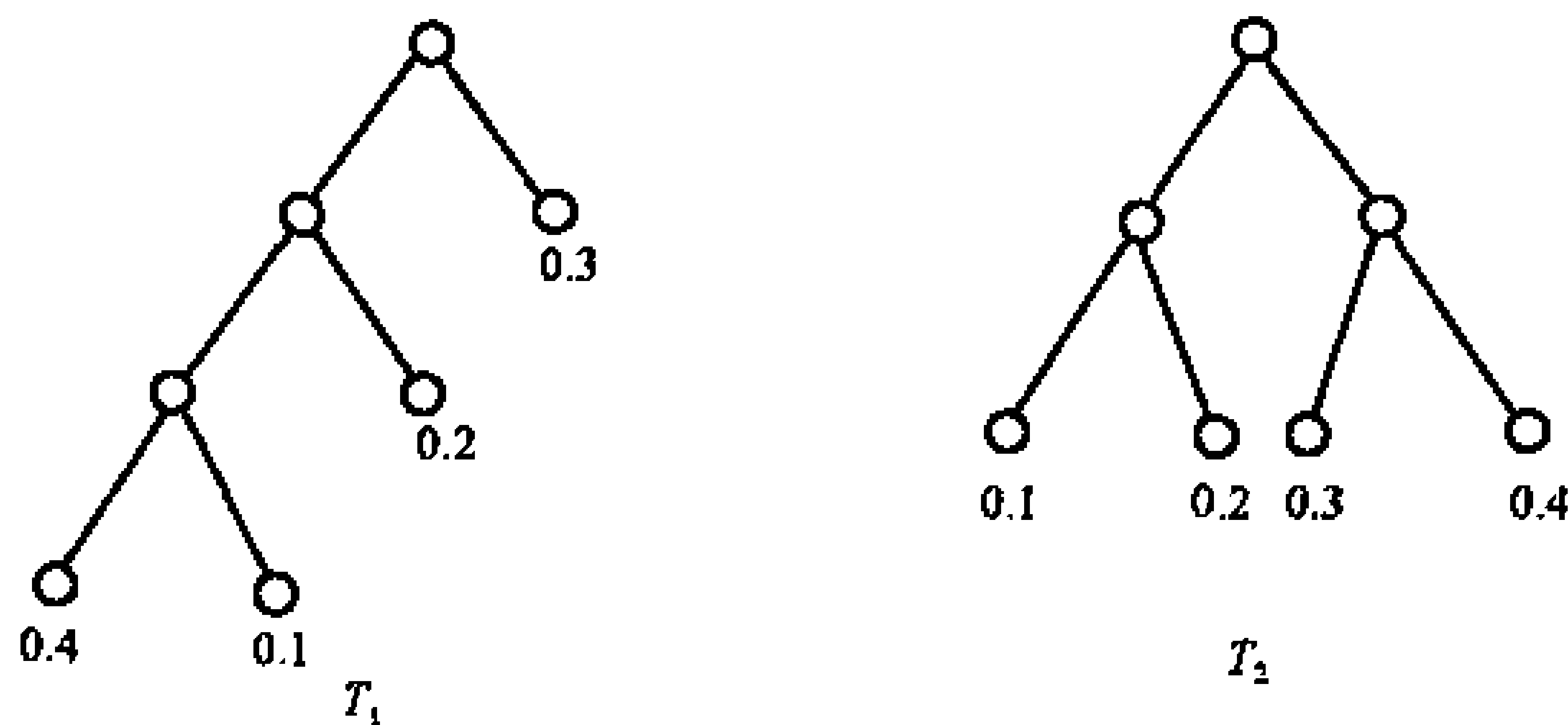


图 2.6.8 带权的有序二元树

重要的问题是如何求出带权 $p_1,\cdots,p_n$ 的 Huffman 树，为此，我们给出如下算法．设 $p_1\leqslant p_2\leqslant\cdots\leqslant p_n$，$v_i$ 为与 p_i 相应的叶子顶点．

Step1 把权为 p_1,p_2 的两个顶点 v_1,v_2 连接到同一个新顶点上，并设该顶点的权为 p_1+p_2．

Step2 在权 $p_1+p_2,p_3,\cdots,p_n$ 中选出两个最小权，把它们对应的顶点连接到另一个新顶点上，并给这个新顶点赋权为此两最小权的和．

Step3 重复 Step2，直到形成 $n-1$ 个新顶点、n 个叶子为止．

利用上述方法，得到例 2.6.1 中所求的 Huffman 树 T_3，如图 2.6.9 所示，易见 $m(T_3)=3(0.1+0.2)+2\cdot 0.3+0.4=1.9<\min\{m(T_1),m(T_2)\}$．若所求的 Huffman 树只有两个叶子，则算法的正确性是显然的．通过对 Huffman 树的叶子数目 n 用归纳法，易见算法所求出的树是最优的．

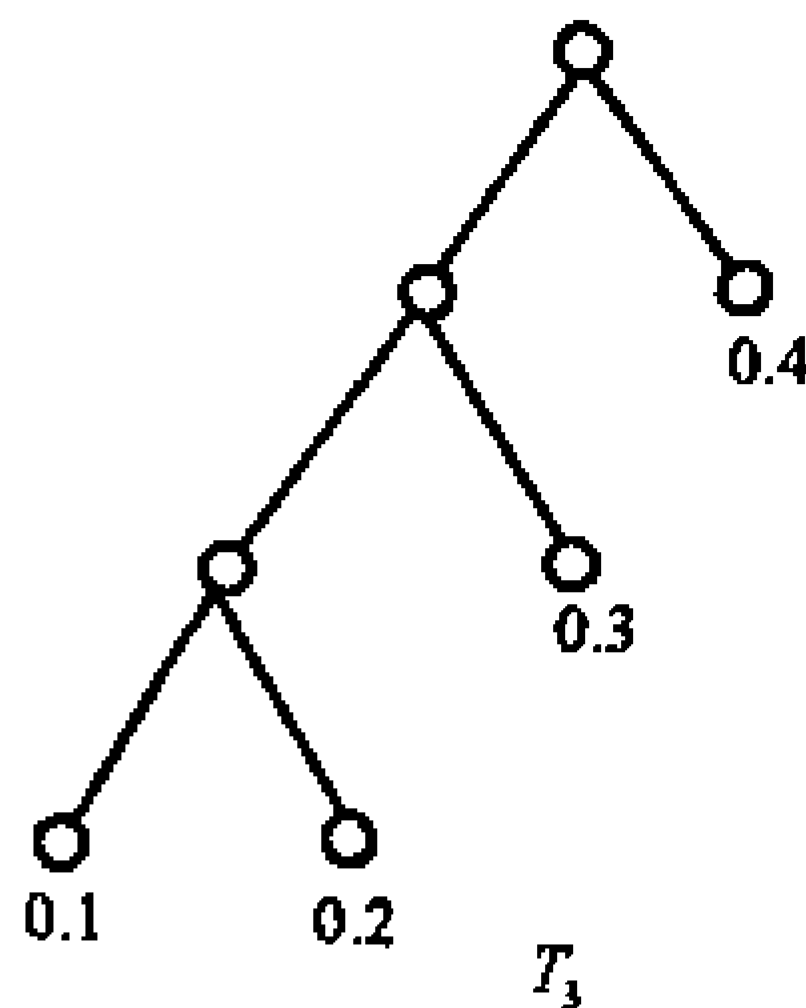


图 2.6.9 Huffman 树

习题二

1. 画出全部互不同构的7阶树.

2. 如果分子式为C_nH_m的碳氢化合物对应的图是树,证明$m=2n+2$,即该碳氢化合物为烷族碳氢化合物.

3. 证明:G中至少含$\varepsilon-\nu+\omega$个不同的圈和$\nu-\omega$个不同的补圈.

4. 证明:

(1) 若无环图G中恰有两个悬挂点,则G一定是链;

(2) 若无环图G中恰有$2k$个奇点,则G一定是k条边不交的链的并.

5. 若图G中存在某边$e=uv\in E(G)$,使得$G\cdot e$为圈,$G-e$为树,证明G必是圈.

6. 10个学生参加一次考试,试题有10道,已知没有两个学生做对的题目完全相同.证明:在这10道试题中可以去掉某一道试题,使每两个学生做对的题目不完全相同.

7. 设T是阶为$k+1$的树,G是满足$\delta\geqslant k$的任一简单图,证明G中一定有一子图与T同构.

8. 证明正整数序列$(d_1,d_2,\cdots,d_\nu)$是某个树的度序列的充要条件为

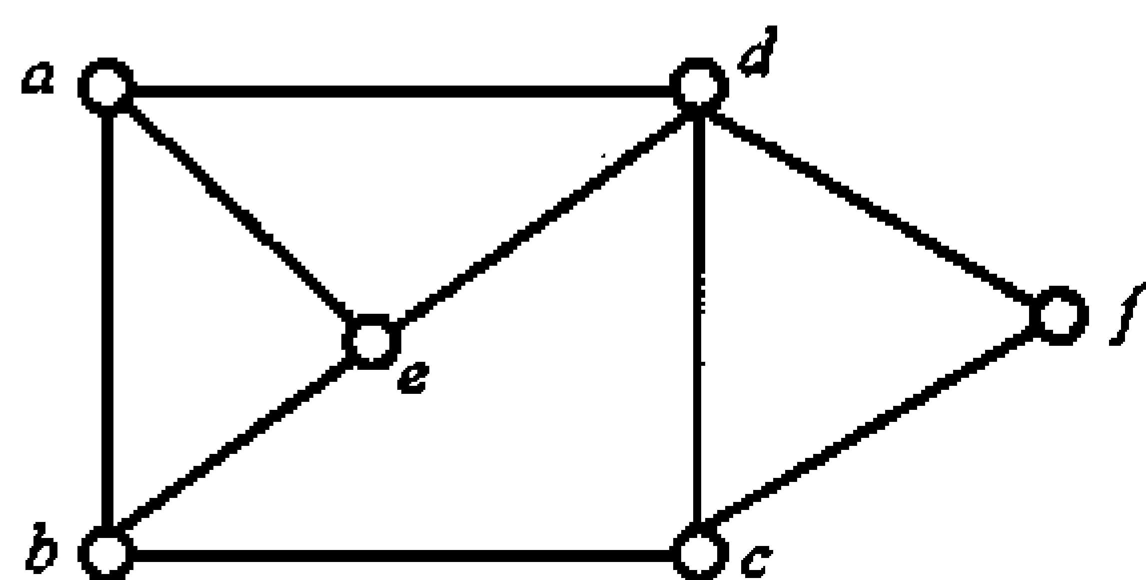
$$\sum_{i=1}^{\nu}d_i=2(\nu-1).$$

9. 设G是阶$\nu\geqslant3$的连通图,证明:

(1) 如果G有割边,则G中有顶点v满足$\omega(G-v)>\omega(G)$;

(2) 举例说明(1)的逆命题不真.

10. 用避圈法和破圈法求题图2.1的全部支撑树.



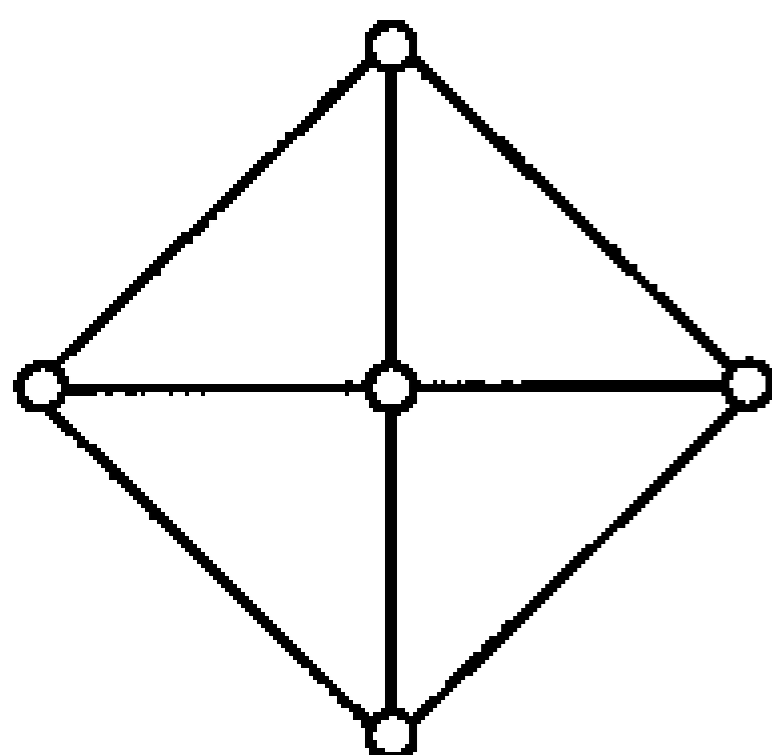
题图2.1

11. 设E'是图G的某些边的集合,证明E'中含补圈的充要条件是

$$\omega(G - E') > \omega(G).$$

12. 求 $\tau(K_{2,3})$ 以及 $K_{2,3}$ 中互不同构的支撑树的数目.

13. 轮图是圈加上一个新顶点(称为轮心),再把每个顶点都与新顶点间连上一条边(称为辐条)所得到的图.记 W_n 为有 n 条辐条的轮图,试求题图 2.2 中轮图 W_4 的支撑树的数目 $\tau(W_4)$.



题图 2.2

14. 设 T 是树,证明:

(1) T 是二部图;

(2) 设 $T = (X, Y, E)$,则

(ⅰ) 若 $|X| \geqslant |Y| \geqslant 1$,则 X 中至少有一个悬挂点;

(ⅱ) 若 $|X| = |Y| + k$,且 $|Y| \geqslant 1$,则 X 中至少有 $k+1$ 个悬挂点.

15. 证明:如果 G 是无环连通图,并且只有惟一的支撑树 T,则 $G = T$.

16. 设 $T_i = (V_i, E_i)(i = 1, 2, \cdots, k)$ 是树 T 的子树,$S = V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_k$.证明:

(1) 若 $V_i \cup V_j \neq \emptyset, 1 \leqslant i \neq j \leqslant k$,则 $S \neq \emptyset$;

(2) 若 $S \neq \emptyset$,则 $T[S]$ 是 T 的子树.

17. 设 C_1 与 C_2 是图 G 中的圈,B_1 与 B_2 是 G 中的补圈(把它们都看成边的集合),证明:

(1) $C_1 \oplus C_2$ 是互不相交的圈的并;

(2) $B_1 \oplus B_2$ 是互不相交的补圈的并;

(3) 对 G 中的任一条边 e,$(C_1 \cup C_2) \setminus \{e\}$ 中含圈;

(4) 对 G 中的任一条边 e,$(B_1 \cup B_2) \setminus \{e\}$ 中含补圈.

其中 $A \oplus B$ 表示 A 与 B 的对称差.

18. 画出带权 0.2, 0.18, 0.12, 0.1, 0.1, 0.08, 0.06, 0.06, 0.06, 0.04 的 Huffman 树.

19. 构造与括号列

$$(()(()()))\quad((()())())$$

相应的有序二元树.

20. 饭后,姐姐洗碗,妹妹把姐姐洗过的碗一个一个地放进碗橱摞成一摞.共有 n 个图样两两相异的碗,洗前也摞成一摞.因为妹妹贪玩,碗拿进碗橱不及时,姐姐把洗过的碗摞在旁边,问妹妹摞起的碗可能有几种方式?

21. 设计一个有序二元树,每个叶子代表一个英文字母,使得用它的叶码序列表示“the apple and banana”时,总的码长最短.

第三章 连通性与遍历性

连通性是图的最基本的属性之一，是图论研究的重要内容. 为了定量研究图的连通性，人们引进了连通度和边连通度的概念. 一个图的连通度和边连通度是由该图惟一确定的，因此，图的这两个量可以用来衡量图的连通程度.

本章我们将介绍图的连通度和边连通度的概念、2 连通图和 3 连通图，以及两类特殊的连通图 ——Euler 图和 Hamilton 图. 在本章的最后一节，我们进一步介绍另一个衡量图的连通程度的概念，这就是坚韧度的概念，它比连通度和边连通度更精细地刻画了图的连通性.

3.1 连通度和边连通度

我们先来观察下面五个 5 阶连通图. 显然，在图 3.1.1 中，树 G_1 中去掉任何一条边都不连通；而 G_2 中去掉任何一条边仍然保持连通，但去掉顶点 v 就不再连通；G_3 是一个圈，去掉任何一条边或任何一个顶点仍然连通，但去掉两条边不再连通，去掉两个顶点也可能破坏连通性；G_4 中至少去掉三条边或三个顶点才可能不连能；G_5 是完全图，至少去掉四条边才可能不连通，并且去掉任何一个顶点子集仍然连通.

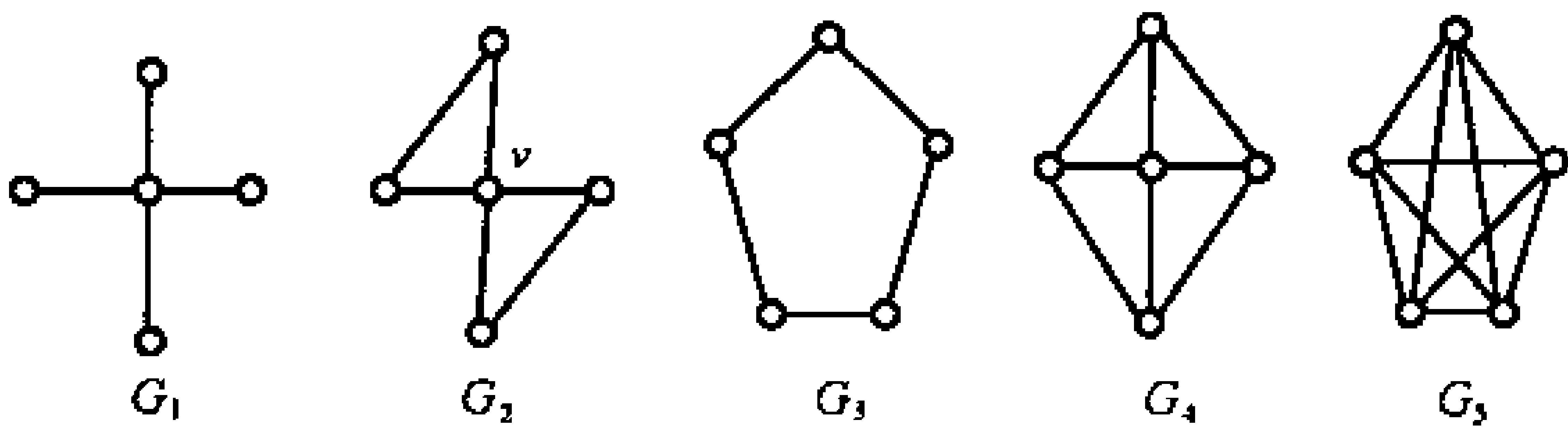


图 3.1.1 图的连通性

如果至少要去掉若干条边或若干个顶点才能破坏图的连通性，则可以把这样的边或顶点的最小数目看做是图的连通程度的一种度量. 这个数目越大，图的连通程度就越高. 由此，我们引进图的连通度和边连通度的概念.

如果图 G 的顶点子集 V' 使 $G-V'$ 不连通，则称 V' 为 G 的顶点割

(vertex-cut). 并且,若 $|V'| = k$,则称 V' 为 G 的 k 顶点割(k-vertex-cut). 显然,完全图没有顶点割,并且没有顶点割的图只能是那些以完全图作为基础简单图的图,即任何一对相异顶点都相邻的那些图. 若图 G 本身就不连通,则空集就是它的顶点割.

如果图 G 中至少有一对相异顶点不相邻,则 G 的连通度(connectivity) $\kappa(G)$ 定义为

$$\kappa(G) = \min\{|V'| \mid V' \text{ 是} G \text{ 的顶点割}\},$$

即这时的连通度定义为使这个图成为非连通图所需要去掉的最少顶点数. 如果图 G 的任何一对相异顶点都相邻,则规定 $\kappa(G) = \nu(G) - 1$.

不难知道,对任何图 G 总有 $\kappa(G) \leqslant \nu(G) - 1$. 并且, $\kappa(G) = 0$ 的图要么是平凡图,要么是非连通图.

称 $\kappa(G) \geqslant k$ 的图为 k 连通图(k-connected graph). 显然,图 G 是 k 连通的($k \geqslant 1$),当且仅当 $\nu(G) \geqslant k + 1$,且 G 中不存在 $k - 1$ 顶点割. 所有非平凡连通图都是 1 连通图.

类似地,我们利用边割来定义边连通度. 显然,任何非平凡连通图都有边割,因此,任何非平凡连通图 G 的边连通度(edge connectivity) $\kappa'(G)$ 定义为

$$\kappa'(G) = \min\{|E'| \mid E' \text{ 是} G \text{ 的边割}\},$$

即一个非平凡连通图的边连通度就是使这个图变得不连通所需去掉的最少边数. 如果 G 是平凡图或非连通图,则规定 $\kappa'(G) = 0$, 因此 $\kappa'(G) = 0$ 的图或是平凡图,或是非连通图.

称 $\kappa'(G) \geqslant k$ 的图为 k 边连通图(k-edge connected graph). 一切非平凡连通图都是 1 边连通图. 易知,图 G 是 k 边连通图的($k \geqslant 2$),当且仅当 G 是连通图且不存在 m 边割($1 \leqslant m \leqslant k - 1$).

由连通度和边连通度的定义可知,在图 3.1.1 中的五个图中, $\kappa(G_1) = \kappa'(G_1) = 1$; $\kappa(G_2) = 1$, $\kappa'(G_2) = 2$; $\kappa(G_3) = \kappa'(G_3) = 2$; $\kappa(G_4) = \kappa'(G_4) = 3$; $\kappa(G_5) = \kappa'(G_5) = 4$. 从这五个图中,我们发现它们满足 $\kappa(G_i) \leqslant \kappa'(G_i) \leqslant \delta(G_i)$ ($i = 1, \cdots, 5$),一般地,我们有下面的定理.

定理 3.1.1　对任何图 G 都有

$$\kappa(G) \leqslant \kappa'(G) \leqslant \delta(G). \tag{3.1.1}$$

证明　如果 G 为非连通图或平凡图,则 $\kappa(G) = \kappa'(G) = 0$, 不等式(3.1.1)显然成立. 故只须考虑非平凡连通图的情形.

先证 $\kappa'(G) \leqslant \delta(G)$, 设 $d(v) = \delta(G)$, E' 为 G 中与 v 关联的一切连杆组成的集合,它是 G 的一个边割,从而有 $\kappa'(G) \leqslant |E'| \leqslant \delta(G)$.

再证

$$\kappa(G) \leqslant \kappa'(G). \tag{3.1.2}$$

如果 G 不是简单图,考虑 G 的基础简单图 $\tilde{G}$,显然有,$\kappa(G) = \kappa(\tilde{G})$,$\kappa'(G) \leqslant \kappa'(\tilde{G})$.因此,若式(3.1.2)对简单图成立,也就对一般图成立,于是以下假设 G 是简单图.又若 G 为完全图 K_n,则 $\kappa(K_n) = \kappa'(K_n) = n-1$,即式(3.1.2)成立.由此只须对非平凡的简单连通图且不是完全图的情形证明式(3.1.2)成立即可,此时 $\nu(G) \geqslant 3$.

由于 G 是非平凡连通图,因此存在边割 $E' \subseteq E(G)$,使得 $|E'| = \kappa'(G)$,由 E' 的最小性知 E' 是 G 的补圈,从而由定理 2.3.1 知 $G - E'$ 恰有两个连通分支.设 $E' = [S, \bar{S}]$,则 $G - E'$ 的两个连通分支为 $G[S]$ 和 $G[\bar{S}]$,设 $G_1 = G[S]$,$G_2 = G[\bar{S}]$.我们断言:必存在 $u \in V(G_1)$,$v \in V(G_2)$,使 $uv \notin E(G)$.若不然,设 $|V(G_1)| = \nu_1$,$1 \leqslant \nu_1 \leqslant \nu - 1$,则 $|V(G_2)| = \nu - \nu_1$,于是

$$\kappa'(G) = |E'| = \nu_1(\nu - \nu_1),$$

由 $1 \leqslant \nu_1 \leqslant \nu - 1$ 知 $(\nu_1 - 1)\nu \geqslant (\nu_1 - 1)(\nu_1 + 1)$,从而有,$\nu_1(\nu - \nu_1) \geqslant \nu - 1$,即知 $\kappa'(G) \geqslant \nu - 1$,此与 G 不是完全图相矛盾.根据这个断言,对于 E' 的每条边总可以取一个异于 u 和 v 的端点,从而得到 G 的一个顶点割 V',$|V'| \leqslant |E'| = \kappa'(G)$,故 $\kappa(G) \leqslant |V'| \leqslant \kappa'(G)$. □

由这个定理知,一个 k 连通图必是 k 边连通图.

定理 3.1.2 对于任何满足 $0 < l \leqslant m \leqslant n$ 的正整数 l, m, n,总存在一个简单图 G,使得 $\kappa(G) = l$,$\kappa'(G) = m$,$\delta(G) = n$.

证明 令 $G_1 = K_{n+1}$,$G_2 = K_{n+1}$,$V(G_1) = \{u_1, u_2, \cdots, u_{n+1}\}$,$V(G_2) = \{v_1, v_2, \cdots, v_{n+1}\}$,我们在 $G_1 \cup G_2$ 中增加 l 条边 u_iv_i($i = 1, \cdots, l$)及 $m - l$ 条边 u_1v_j($j = 2, \cdots, m - l + 1$),得到的简单图记为 G.容易验证:$\kappa(G) = l$,$\kappa'(G) = m$,$\delta(G) = n$. □

定理 3.1.2 说明,式(3.1.1)不能再改进了.

3.2 2 连通图和 3 连通图

弄清割点在图中的分布对认识一个连通图的结构很有帮助.没有割点的连通图称为块(block).1 阶块只能是 K_1 或含有一个环的平凡图,2 阶块只能是 K_2 或含有多条连杆的 2 阶图,至少含有三个顶点的块中不存在顶点 v 使 $\omega(G - v) > \omega(G)$,即不存在 1 顶点割,因此这样的块必是 2 连通图.

图 G 的块是指 G 的这样的子图 B,B 是块,且 G 中任何以 B 为真子图的子图都不是块,即 B 是 G 的极大块.易知,任何一个图都是它的块的并.在图 3.2.1 中,

G 的三个"黑顶点"是割点，G_1 的每个连通分支都是 G 的块.

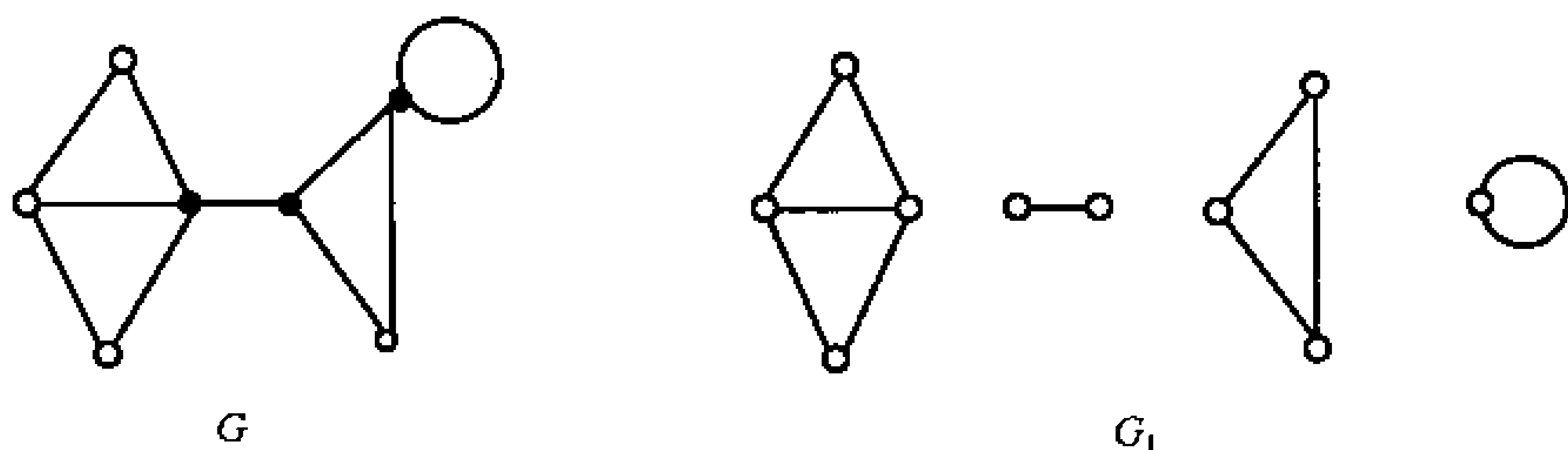


图 3.2.1　图的块

定理 3.2.1(Whitney, 1932)　一个 $\nu \geqslant 3$ 的图 G 是 2 连通的，当且仅当 G 的任何两个顶点由至少两条内部不相交的链连接.

证明

($\Leftarrow$) 若 G 的任何两个顶点由至少两条内部不相交的链连接，则 G 是连通的，且没有 1 顶点割，而 $\nu \geqslant 3$，故 G 是 2 连通的.

($\Rightarrow$) 设 G 是 2 连通的，$\forall u, v \in V(G)$，我们对 $d(u,v)$ 用归纳法证明：u 与 v 至少由 G 的两条内部不相交的链连接.

当 $d(u,v) = 1$ 时，因为 $2 \leqslant \kappa(G) \leqslant \kappa'(G)$，所以边 uv 不是割边，从而由定理 2.2.2，uv 包含在 G 的一个圈中，故 u 与 v 被两条内部不相交的链连接.

假设结论对 G 中距离小于 k 的任何两个顶点都成立. 设 $d(u,v) = k \geqslant 2$. 考虑 G 中长度为 k 的 (u,v) 链，即 G 中最短 (u,v) 链，令 wv 是该链中最后一条边，则该链上的 (u,w) 节是 G 中最短 (u,w) 链，故 $d(u,w) = k-1$，由归纳假设，G 中存在两条内部不相交的 (u,w) 链 P 和 Q. 如图 3.2.2 所示. 因为 G 是 2 连通的，所以 $G-w$ 连通，从而含有一条 (u,v) 链 P'. 设 x 是 P' 上的在 $P \cup Q$ 中的最后一个顶点(因为 P' 与 $P \cup Q$ 有公共顶点 u，因此这样的 x 总是存在的，当然不排除 $x = u$)，不失一般性，设 x 在 P 上，则 G 中有两条内部不相交的 (u,v) 链：一条是由 P 上的 (u,x) 节与 P' 的 (x,v) 节组成，另一条是由 Q 和 wv 组成，由归纳原

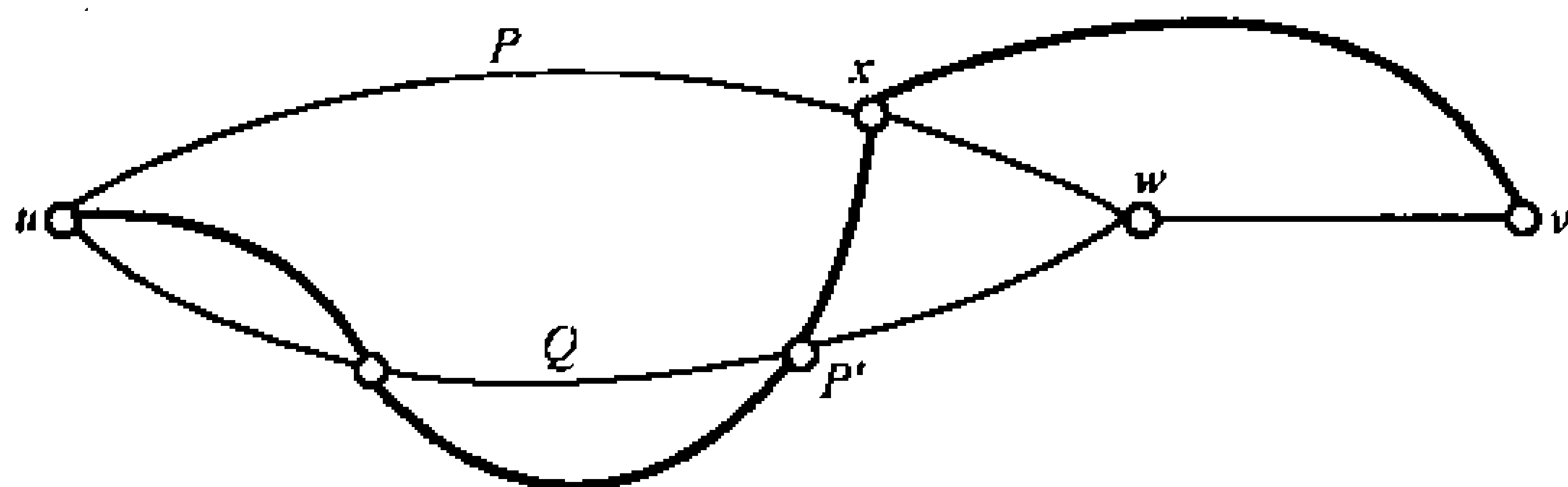


图 3.2.2　两条内部不相交的 (u,v) 链

理，必要性得证. □

由定理 3.2.1 立即得到下面的结论.

推论 3.2.2 若 G 是 2 连通的，则 G 的任何两个顶点在一个圈上. □

为了方便起见，我们引入边的剖分运算. 一条边 e 称为被剖分(subdivision)是指去掉边 e，并用一条连接 e 的两个端点的长为2的链代替. 根据定理3.2.1和剖分的定义即知，$\nu \geq 3$ 的块经过有限次剖分后还是块，即块在剖分运算下是封闭的.

推论 3.2.3 若 G 是 $\nu \geq 3$ 的块，则 G 的任何两条边在一个圈上.

证明 设 G 是块，$\nu \geq 3$，e_1 和 e_2 是 G 的任意两条边，则 e_1 和 e_2 都是连杆. 把 e_1 和 e_2 剖分后得到新图 G'，v_1 和 v_2 为 G' 的新顶点. 显然 G' 至少有5个顶点，且为块，因而 $\kappa(G) \geq 2$. 由推论3.2.2知，v_1 和 v_2 在 G' 的同一个圈上，于是 e_1 和 e_2 在 G 的同一个圈上. □

与图中边的剖分运算相对应的是我们在第二章中介绍过的收缩运算. 同样，利用边的收缩，下面给出 3 连通图的一个性质，为此先证明两个引理.

引理 3.2.4 设 G 是 k 连通图，$k \geq 2$，则对于 G 的任何连杆 e，$G \cdot e$ 是 $k-1$ 连通图.

证明 若 $G \cdot e$ 的基础简单图是完全图，则有

$$\kappa(G \cdot e) = \nu(G \cdot e) - 1 = \nu(G) - 2 \geq \kappa(G) - 1 \geq k - 1,$$

引理成立. 否则，设 S 是 $G \cdot e$ 的任一顶点割，$e = uv$，e 被收缩后的新顶点记为 u'，分两种情况讨论.

(1) 若 $u' \in S$，则 $S' = (S \setminus \{u'\}) \cup \{u, v\}$ 是 G 的顶点割，从而 $k \leq |S'| = |S| + 1$.

(2) 若 $u' \notin S$，则 S 也是 G 的顶点割，故 $k \leq |S|$.

因此，总有 $|S| \geq k - 1$，即 $G \cdot e$ 是 $k-1$ 连通图. □

引理 3.2.5 设 $\kappa(G) = k \geq 1$，且 $V' = \{v_1, \cdots, v_k\}$ 是 G 的 k 顶点割，$G_1, \cdots, G_p$ 是 $G - V'$ 的全部分支，则 $\forall 1 \leq i \leq k$ 和 $1 \leq j \leq p$，顶点 v_i 必与分支 G_j 的某个顶点在 G 中相邻.

证明 若不然，存在 $1 \leq i_0 \leq k$ 及 $1 \leq j_0 \leq p$，使 v_{i_0} 与 G_{j_0} 的任何顶点都不相邻，令 $V'' = V' \setminus \{v_{i_0}\}$，则 $G - V''$ 不连通，即 V'' 是 G 的 $k-1$ 顶点割，此与 $\kappa(G) = k$ 矛盾. □

定理 3.2.6(Thomassen, 1980) 设 G 是 3 连通图，$\nu \geq 5$，则存在 G 的连杆 e，使 $G \cdot e$ 仍是 3 连通图.

证明 当 $\kappa(G) \geq 4$ 时，由引理 3.2.4 知定理成立. 下面证明当 $\kappa(G) = 3$

时，结论亦成立.

若不然，对任一连杆 $e = uv$，由引理3.2.4知，$\kappa(G \cdot e) = 2$. 因为 $\nu(G) \geqslant 5$，所以 $\nu(G \cdot e) \geqslant 4$，从而 $G \cdot e$ 的基础简单图不是完全图，即 $G \cdot e$ 有2顶点割. 又因 G 是3连通图，故 e 被收缩后得到的新顶点必在 $G \cdot e$ 的每个2顶点割之中，于是 G 必有3顶点割 $\{u, v, x\}$，这里 x 与 u, v 的选择有关.

我们取这样的连杆 $e = uv$ 及 x，使 $G - \{u, v, x\}$ 的最大(即顶点数最多)连通分支 H 的顶点尽可能多. 设 H' 是 $G - \{u, v, x\}$ 的另一个连通分支，由引理3.2.5知，必有 $y \in V(H')$ 使 $xy \in E(G)$. 考虑连杆 xy，由以上知，G 有3顶点割 $\{x, y, z\}$，记

$$G_1 = G[V(H) \cup \{u, v\}] - x.$$

若 $z \notin V(H)$，由引理3.2.5，G_1 是连通图；若 $z \in V(H)$，G_1 也是连通图(否则，$\{x, z\}$ 是 G 的2顶点割，矛盾). 所以 G_1 必包含在 $G - \{x, y, z\}$ 的一个分支中，但 $|V(H)| < |V(G_1)|$，这与 e 的选择相矛盾. □

定理3.2.1可以推广到 k 连通图，这就是所谓的Menger定理. 在适当的条件下，定理3.2.6也可以推广到 k 连通图.

3.3 遍历性

图的遍历性包括遍历所有边的Euler图和遍历所有顶点的Hamilton图. Euler图是重要的2边连通图，而Hamilton图则是重要的2连通图. 对于Euler图，我们在很早以前就知道如何判定一个图是否为Euler图. 但对于Hamilton图，直到现在，我们也没有找到一个好的方法来判定一个图是否为Hamilton图. 本节我们将介绍关于Euler图和Hamilton图的一个基本结论.

3.3.1 Euler图

所谓Euler图是根据Euler研究的Königsberg七桥问题引出的. Königsberg七桥问题实际上就是问图3.3.1中是否存在包含所有边的闭迹. 为此我们给出下面的概念.

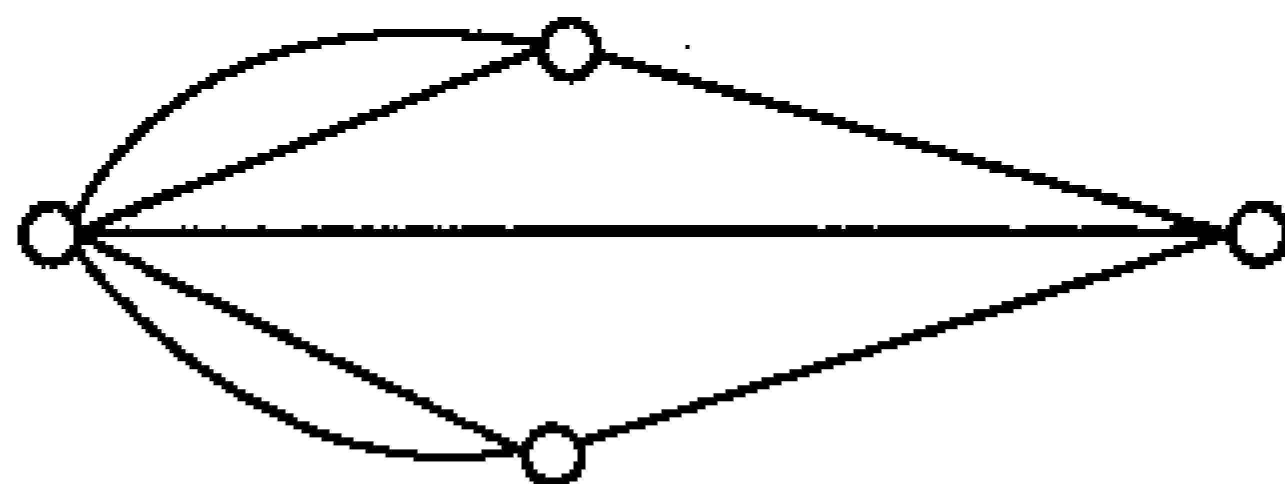


图3.3.1 Königsberg七桥问题

如果图 G 中存在包含所有边的闭迹 W，则称 G 为 Euler 图，W 称为 G 的 Euler 闭迹. 如果 G 中有包含一切边的迹 P，则称 G 为半 Euler 图(semi-Euler graph)，P 称为 G 的 Euler 迹. 显然，每个 Euler 图都是半 Euler 图，但半 Euler 图却不一定是 Euler 图.

下面给出 Euler 图的特征性描述.

定理 3.3.1 设 G 是非空连通图，则下面三个命题等价：

(1) G 是 Euler 图；

(2) G 中不含奇点；

(3) G 可以表示为若干个没有公共边的圈的并.

证明

(1)⇒(2) 设 G 是连通的 Euler 图，W 是 G 的 Euler 闭迹，则 $\forall v \in V(G)$，v 必定在 W 中出现，当 v 作为内点每出现一次，必定与 G 中的两条边关联；当 v 为 W 的起点，则 v 也是 W 的终点，从而它必与两条边关联，因此，G 的每个顶点都是偶点.

(2)⇒(3) 设 G 是非空连通图，且不含奇点，则 G 不是树，从而 G 中含有圈 C_1. 若 $E(G) \setminus E(C_1) = \varnothing$，则 $G = C_1$，从而(3) 成立. 否则考虑由 $E(G) \setminus E(C_1)$ 导出的 G 的子图 G_1，同样 G_1 不含奇点，于是 G_1 中必含有圈 C_2. 若 $E(G_1) \setminus E(C_2) = \varnothing$，则 $G = C_1 \cup C_2$，$E(C_1) \cap E(C_2) = \varnothing$，(3) 成立. 否则，考虑由 $E(G_1) \setminus E(C_2)$ 导出的 G_1 的子图 G_2，如此下去，经过有限次得到空图 G_{k+1}，于是 $G = \bigcup_{i=1}^{k} C_i$，其中 $i \neq j$ 时，$E(C_i) \cap E(C_j) = \varnothing$，即(3) 总是成立的.

(3)⇒(1) 由 Euler 图的定义，结论显然. □

定理 3.3.1 中(1)⇒(2) 是由 Euler 于 1736 年证明的，由于 Königsberg 七桥中每个顶点都是奇点，故它不可能是 Euler 图，这表明七桥问题无解.

推论 3.3.2 非空连通图 G 是半 Euler 图的充要条件是 G 中至多有两个奇点.

证明

(⇒) 若 G 有一条 Euler 迹，则如定理 3.3.1 中(1)⇒(2) 的证明一样，除了起点、终点外，G 中其余顶点的度都是偶数.

(⇐) 设非空连通图 G 至多有两个奇点. 当 G 中没有奇点时，由定理 3.3.1 知，G 为 Euler 图，当然也是半 Euler 图. 若 G 中含有奇点，则 G 中不可能只有 1 个奇点(握手引理)，于是 G 中恰有两个奇点 u 和 v，此时 $G + uv$ 不含奇点，且是非空连通图，故 $G + uv$ 中含有 Euler 闭迹 W，$W - uv$ 为 G 的 Euler 迹，于是 G 为半 Euler 图. □

3.3.2 Hamilton 图

Hamilton 图是由 Hamilton 游戏引出的，研究一般图在什么条件下存在一个包含所有顶点的圈是本节所关心的问题，为此先给出几个概念.

若 G 中存在包含一切顶点的圈 C，则称 G 是 Hamilton 图，C 称为 G 的 Hamilton 圈.若 G 中存在包含一切顶点的链 P，则称 G 是半 Hamilton 图，P 称为 G 的 Hamilton 链.显然，Hamilton 图必是半 Hamilton 图，反之不然.虽然已经知道几个关于 Hamilton 图的必要的条件或充分的条件，但到目前为止，还未找到关于它的非平凡的充要条件，这是图论中一个尚待解决的问题.

定理 3.3.3

(1) 若 G 是 Hamilton 图，则

$$\omega(G-S)\leqslant|S|\quad(\forall S\subset V,S\neq\varnothing);\tag{3.3.1}$$

(2) 若 G 是半 Hamilton 图，则

$$\omega(G-S)\leqslant|S|+1\quad(\forall S\subset V,S\neq\varnothing).\tag{3.3.2}$$

证明

(1) 设 C 是 G 的 Hamilton 圈，显然 $\omega(C-S)\leqslant|S|$，因 $C-S$ 是 $G-S$ 的支撑子图，故 $\omega(G-S)\leqslant\omega(C-S)\leqslant|S|$.

(2) 与(1)的证明类似，只须用 Hamilton 链 P 代替 C 即可. □

例 3.3.1　判定图 3.3.2 中的 Herschel 图是否为 Hamilton 图.

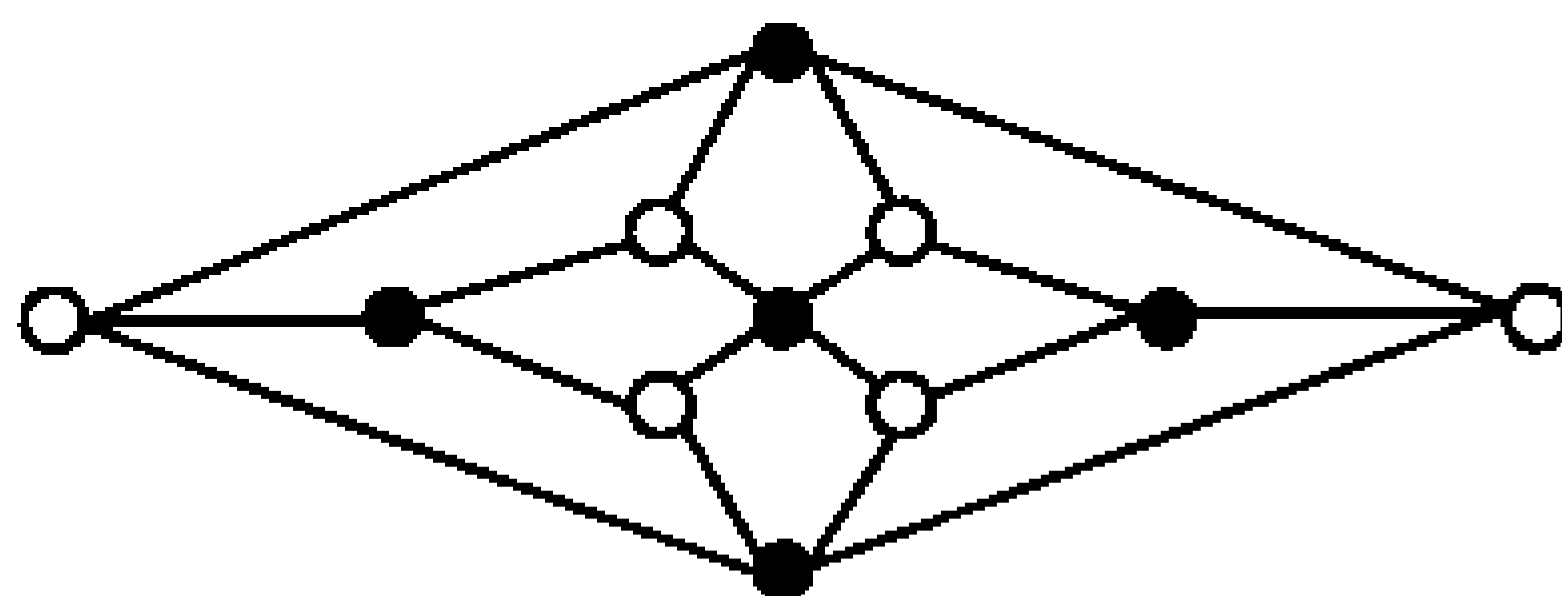


图 3.3.2　Herschel 图

解　Herschel 图不是 Hamilton 图，因为删除五个"黑顶点"后，将得到六个孤立点，由定理 3.3.3 知它不是 Hamilton 图. □

考察 Herschel 图，发现它是一个二部图，且有奇数个顶点，又由于二部图中无奇圈，因此可以断言奇数阶的二部图必不是 Hamilton 图，进一步，我们有以下推论.

推论 3.3.4　设 $G=(X,Y,E)$ 为二部图，则有

(1) 若 G 是 Hamilton 图，则 $|X|=|Y|$；

(2) 若 G 是半 Hamilton 图，则 $||X|-|Y||\leqslant 1$.

证明

(1) 若 $|X| \neq |Y|$，不妨设 $0 < |X| < |Y|$，则

$$\omega(G-X) = |Y| > |X|,$$

由定理 3.3.3(1) 知，G 不是 Hamilton 图.

(2) 若 $||X| - |Y|| > 1$，不妨设 $0 < |X| < |Y|$，则有 $|Y| > |X| + 1$，即 $\omega(G-X) = |Y| > |X| + 1$，于是由定理 3.3.3(2) 知，$G$ 不是半 Hamilton. □

利用定理 3.3.3 和推论 3.3.4 可以判定某些图不是 Hamilton 图或不是半 Hamilton 图，这些条件都只是必要条件，但不充分. 例如在图3.3.3中，G_1 和 G_2 分别满足定理 3.3.3 中式(3.3.1) 和式(3.3.2)，但 G_1 不是 Hamilton 图，G_2 不是半 Hamilton 图.

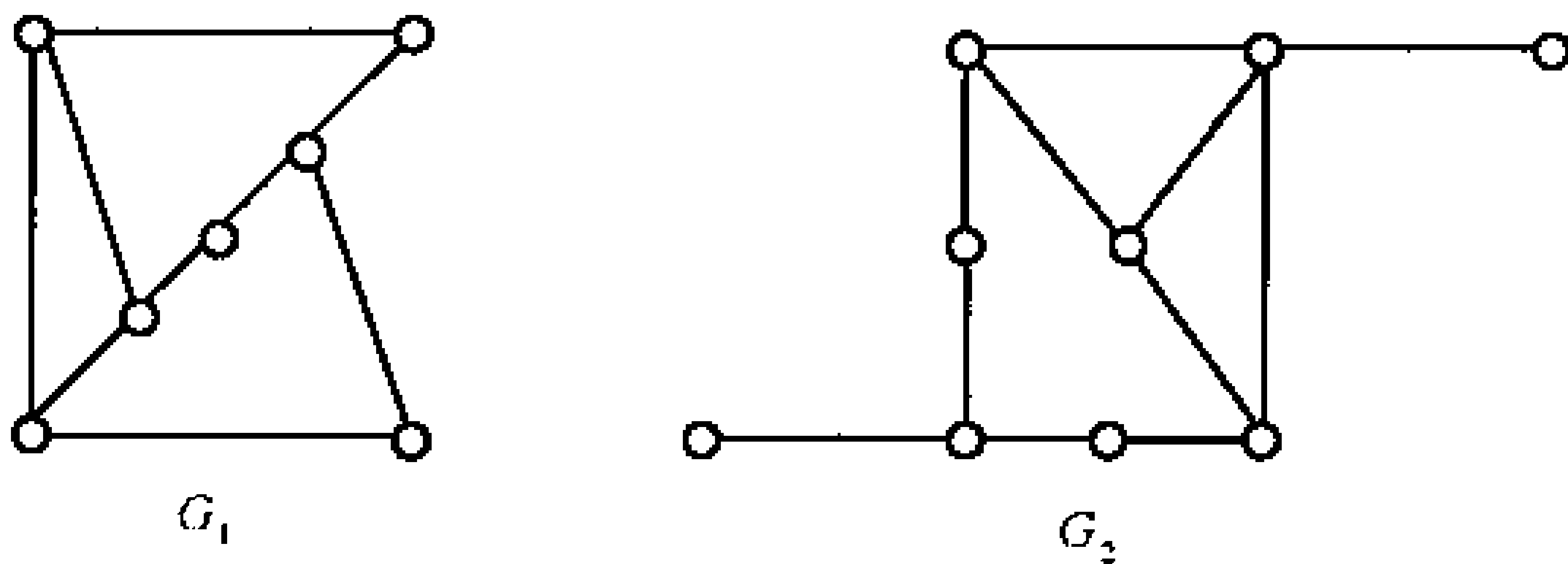


图 3.3.3 G_1 不是 Hamilton 图，G_2 不是半 Hamilton 图

易知，一个图是 Hamilton，当且仅当它的基础简单图是 Hamilton，因此，我们只需讨论简单图.

引理 3.3.5 设 G 是简单图，u 和 v 在 G 中不相邻，$u \neq v$，且 $d(u) + d(v) \geqslant \nu$，则 G 是 Hamilton 图的充要条件是 $G + uv$ 是 Hamilton 图.

证明

($\Rightarrow$) 若 G 是 Hamilton 图，则 $G + uv$ 是 Hamilton 图，必要性显然成立.

($\Leftarrow$) 若 $G + uv$ 是 Hamilton 图，而 G 不是 Hamilton 图，则令 C 是 $G + uv$ 的 Hamilton 圈，从而边 uv 必在圈 C 上，于是 $C - uv$ 是 G 中的 Hamilton 链，设 $C - uv = v_1 v_2 \cdots v_\nu$，其中 $v_1 = u, v_\nu = v$，记

$$S = \{v_i \mid v_1 v_i \in E(G)\}, T = \{v_i \mid v_{i-1} v_\nu \in E(G)\}.$$

因 G 是简单图，故 $|S| = d_G(v_1) = d_G(u)$，$|T| = d_G(v_\nu) = d_G(v)$. 又因为 v_1 和 v_ν 在 G 中不相邻，所以 $S \subseteq \{v_2, \cdots, v_{\nu-1}\}$，$T \subseteq \{v_3, \cdots, v_\nu\}$，从而 $S \cup T \subseteq \{v_2, \cdots, v_\nu\}$，于是 $|S \cup T| \leqslant \nu - 1$. 而且 $S \cap T = \varnothing$. 事实上，若 $v_i \in S \cap T$，则存在 G 的 Hamilton 圈 $v_1 v_2 \cdots v_{i-1} v_\nu v_{\nu-1} v_{\nu-2} \cdots v_i v_1$，此与前面的假设矛盾. 因此

有

$$\nu \leqslant d_G(u) + d_G(v) = |S| + |T| = |S \cup T| \leqslant \nu - 1,$$

矛盾.　□

由引理 3.3.5 可得图的闭包的定义.图 G 的闭包(closure)$c(G)$ 是指用下列方法得到的一个图:反复连接 G 中度之和不小于 ν 的不相邻顶点对,直到没有这样的顶点对为止.如图 3.3.4 中给出了图 G 的闭包 $c(G)$.

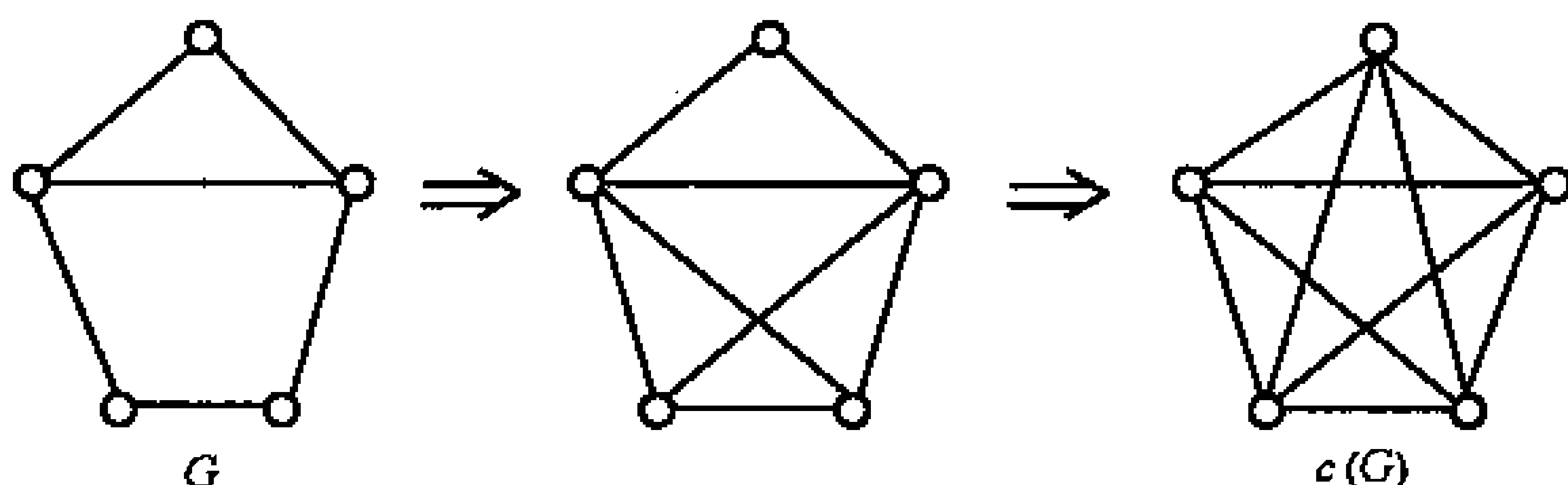


图 3.3.4　图的闭包

引理 3.3.6　$c(G)$ 是由 G 惟一确定的.

证明　设 G_1 和 G_2 是 G 的两个闭包,用 $e_1, \cdots, e_m$ 和 $f_1, \cdots, f_n$ 分别表示在构作 G_1 和 G_2 过程中所加到 G 中的边,我们将证明:每边 e_i 是 G_2 中的边,每边 f_j 是 G_1 中的边.

如有可能,设 $e_{k+1} = uv$ 是序列 $e_1, \cdots, e_m$ 中第一条不在 G_2 中的边,令 $H = G + \{e_1, \cdots, e_k\}$,由 G_1 的定义,$d_H(u) + d_H(v) \geqslant \nu$.由 e_{k+1} 的选择,H 是 G_2 的子图,故 $d_{G_2}(u) + d_{G_2}(v) \geqslant \nu$.而 u 和 v 在 G_2 中不相邻,此与 G_2 的定义相矛盾.从而每条边 e_i 都是 G_2 的边,类似地证明:每条边 f_j 都是 G_1 的边.因此 $G_1 = G_2$,即 $c(G)$ 是由 G 所惟一确定的.　□

在构造 $c(G)$ 的过程中,每添加一条边就应用一次引理 3.3.5,则可得到如下定理.

定理 3.3.7(Bondy, Chvàtal, 1976)　一个简单图 G 是 Hamilton 图,当且仅当 $c(G)$ 是 Hamilton 图.　□

因为至少有三个顶点的完全图是 Hamilton 图,从而可以得到定理 3.3.7 的一个有趣的推论.

推论 3.3.8　设 G 是简单图,且 $\nu \geqslant 3$,若 $c(G)$ 是完全图,则 G 是 Hamilton 图.　□

但是,若 G 是 Hamilton 图,$c(G)$ 不一定是完全图,例如,5 圈 C_5.

推论 3.3.9(Ore, 1960)　设 G 是简单图,$\nu \geqslant 3$,且对于 G 中任一对不相邻的

相异顶点 u 和 v,有 $d(u)+d(v)\geqslant \nu$,则 G 是 Hamilton 图.

证明 因为 $c(G)$ 是完全图,所以由推论 3.3.8 即得. □

根据推论 3.3.9,显然有:

推论 3.3.10(Dirac,1952) 设 G 是简单图,且 $\nu\geqslant 3,\delta\geqslant \nu/2$,则 G 是 Hamilton 图. □

推论 3.3.11 设 G 是简单图,且对 G 中任何一对不相邻的相异顶点 u 和 v,有 $d(u)+d(v)\geqslant \nu-1$,则 G 是半 Hamilton 图.

证明 若 $\nu=1$,则推论显然成立.假设 $\nu\geqslant 2$,在 G 中添加一个顶点 v_0,并且使 v_0 与 $V(G)$ 中每个顶点都相邻,得到一个新图,记作 G_1,则 G_1 是简单图,$\nu(G_1)\geqslant 3$,并且 $\forall v\in V(G),d_{G_1}(v)=d_G(v)+1$,于是对 G_1 中任一对不相邻的相异顶点 u 和 v(它们在 G 中也不相邻),有

$$d_{G_1}(u)+d_{G_1}(v)=d_G(u)+d_G(v)+2\geqslant \nu(G)+1=\nu(G_1),$$

根据 Ore 定理,G_1 中存在 Hamilton 圈 C,从而 $C-v_0$ 是 G 中一条 Hamilton 链,所以 G 是半 Hamilton 图. □

由推论 3.3.11 即得:

推论 3.3.12 设 G 是简单图,并且 $\delta\geqslant(\nu-1)/2$,则 G 是半 Hamilton 图. □

Hamilton 图的另一个充分条件是

定理 3.3.13(Chvàtal,1972) 设 G 是度序列为 $(d_1,d_2,\cdots,d_\nu)$ 的简单图,这里 $d_1\leqslant d_2\leqslant\cdots\leqslant d_\nu,\nu\geqslant 3$.若对满足 $d_m\leqslant m<\nu/2$ 的每个 m 都有 $d_{\nu-m}\geqslant \nu-m$,则 G 是 Hamilton 图.

证明 设 G 满足定理的条件,用反证法证明 $c(G)$ 是完全图.假设 $c(G)$ 不是完全图,记 $H=c(G)$.

设 u 和 v 在 H 中不相邻,且使 $d_H(u)+d_H(v)$ 尽可能大.不妨设 $d_H(u)\leqslant d_H(v)$,由 $c(G)$ 的定义有

$$d_H(u)+d_H(v)\leqslant \nu-1,$$

记 $m=d_H(u)$,则 $m<\frac{\nu}{2}$,令

$$S=\{w\in V(H)\mid vw\notin E(H)\},$$
$$T=\{w\in V(H)\mid uw\notin E(H)\}.$$

图 G 是简单图,故

$$|S|=\nu-1-d_H(v)\geqslant \nu-1-(\nu-1-d_H(u))=d_H(u)=m,$$
$$|T|=\nu-1-d_H(u)=\nu-1-m.$$

根据 u 和 v 的选择，S 中每个顶点在 H 中的度 $\leqslant d_H(u) = m$，$T \cup \{u\}$ 中每个顶点在 H 中的度 $\leqslant d_H(v) < \nu - m$，因此，$c(G)$ 中至少有 m 个顶点的度不大于 m，同时至少有 $\nu - m$ 个顶点的度小于 $\nu - m$.

因为 G 是 $c(G)$ 的支撑子图，所以 G 中顶点的度也有上述性质，即

$$d_m \leqslant m < \nu/2, \qquad d_{\nu-m} < \nu - m,$$

此与定理的条件相矛盾. □

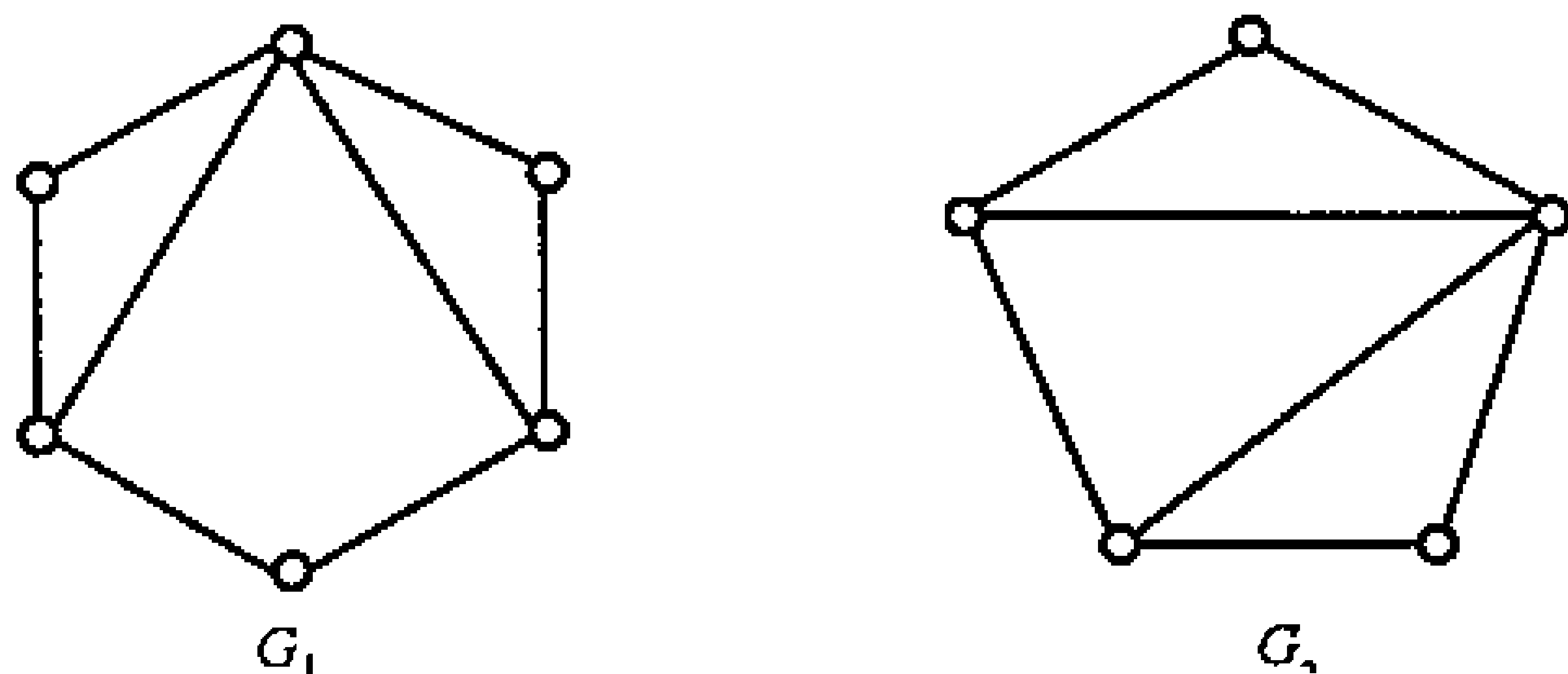


图 3.3.5　Hamilton 图的三个充分条件的比较

下面考虑图3.3.5所示的两个图 G_1 和 G_2. 对于 G_1，它的度序列为$(2,2,2,3,3,4)$，$\nu = 6$，存在 $m = 2$，使 $d_m \leqslant m < \nu/2$，但 $d_{\nu-m} < \nu - m$，由 Chvàtal 定理不能判定 G_1 是 Hamilton 图，但是由推论 3.3.8 可以判定 G_1 是 Hamilton 图. 对于图 G_2，它的度序列为$(2,2,3,3,4)$，$\nu = 5$，若有 m 使得$d_m \leqslant m < \nu/2$，即 $m = 2$，则 $d_{\nu-m} = d_3 = 3 \geqslant \nu - m$，由 Chvàtal 定理知 G_2 是 Hamilton 图，但由 Ore 定理不能判定 G_2 是 Hamilton 图. 综上所述，Chvàtal 定理比 Ore 定理强，但比推论 3.3.8 弱.

按照推论 3.3.11 的证明方法，由定理 3.3.13 即得

推论3.3.14　设 G 是度序列为$(d_1, \cdots, d_\nu)$ 的简单图，其中 $d_1 \leqslant d_2 \leqslant \cdots \leqslant d_\nu$，若对满足 $d_m < m < (\nu + 1)/2$ 的每个 m 都有 $d_{\nu-m+1} \geqslant \nu - m$，则 G 是半 Hamilton 图. □

不难看出，若 G 是 Hamilton 图，则 G 必定是 2 连通图，因此我们可以限制在 2 连通简单图中去研究 Hamilton 图的存在问题.

定理 3.3.15(范更华，1984)　设 G 是 2 连通简单图，若对 G 中满足 $d(u,v) = 2$ 的任一顶点 u 和 v，都有 $\max\{d(u), d(v)\} \geqslant \nu/2$，则 G 是 Hamilton 图.

证明　令 $S = \{v \in V(G) \mid d(v) \geqslant \nu/2\}$，若 $S = V(G)$，则由 Dirac 定理知，G 是 Hamilton 图. 下设 $S \subset V(G)$，$G_1, \cdots, G_n$ 是 $G - S$ 的连通分支. 根据定理 3.3.7，不妨设 $G[S]$ 是完全图. 又由假设条件知，每个 $G_i\,(i = 1, \cdots, n)$ 也是完全图. 事实上，若某个 G_i 不是完全图，则由例 1.4.1 知，存在 $u, v, w \in V(G_i)$，使 uv

$\notin E(G_i)$，而 $uw, vw \in E(G_i)$，即 $d_G(u,v) = d_{G_i}(u,v) = 2$，于是 u 或 $v \in S$，矛盾.

$\forall 1 \leqslant i \leqslant n$，令

$$S_i = \{v \in S \mid 存在\ u \in V(G_i), uv \in E(G)\},$$

$$T_i = \{v \in V(G_i) \mid 存在\ u \in S, uv \in E(G)\}.$$

因为 G 是 2 连通的，所以 $\forall 1 \leqslant i \leqslant n$，$|S_i| \geqslant 2$；当 $|V(G_i)| \geqslant 2$ 时，$|T_i| \geqslant 2$，并且 $\forall 1 \leqslant i < j \leqslant n, S_i \cap S_j = \emptyset$（若有 $v \in S_{i_1} \cap S_{i_2}$，则由 S_{i_k} 的定义，有 $u_k \in V(G_{i_k}), k = 1,2$，使 $d_G(u_1,u_2) = 2$，从而由假设条件必有 $u_1 \in S$ 或 $u_2 \in S$，矛盾）. 由此不难看出，G 是 Hamilton 图. □

例 3.3.2 我们把下面的图叫做“马图”：以方格棋盘上的小方格为顶点，当且仅当一格能以马的一步跳到另一格时，此二格所代表的顶点之间连一边.

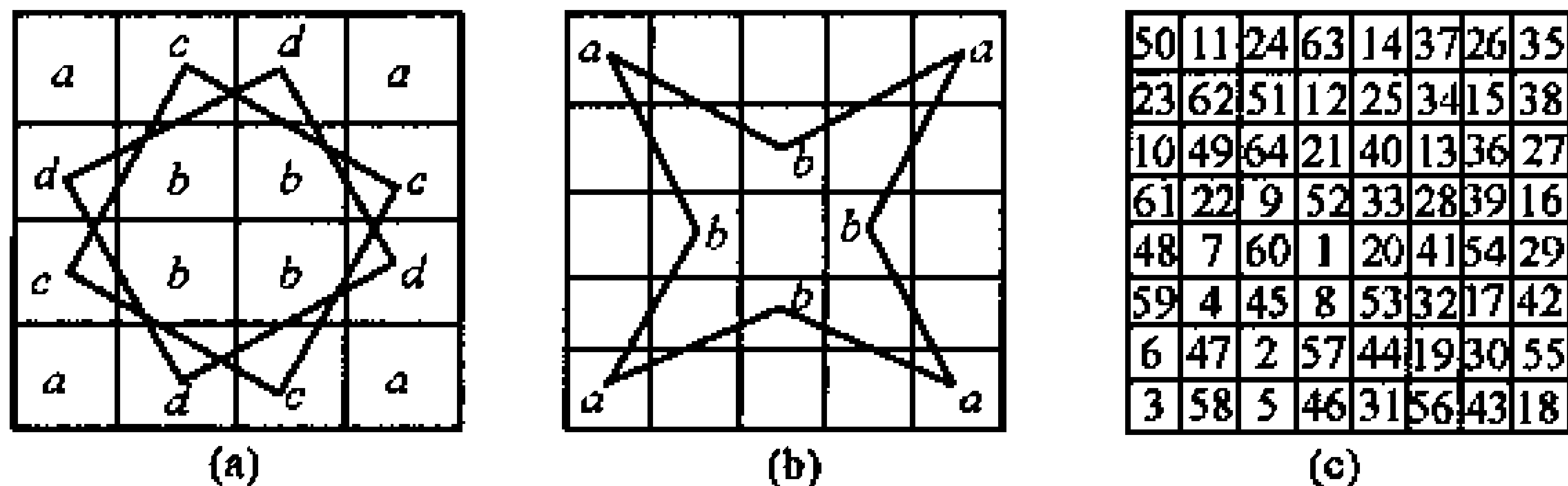


图 3.3.6 马图

(1) 4×4 的棋盘上的马图(图 3.3.6(a)) 是否为 Hamilton 图？即马从任一方格出发，每个格恰跳一次，再回到出发的那个方格，是否可能？

(2) 5×5 的棋盘上的马图(图 3.3.6(b)) 是否为 Hamilton 图？

(3) 8×8 的棋盘上的马图(图 3.3.6(c)) 是否为 Hamilton 图，即在国际象棋棋盘上是否可以从任何一个方格跳过每个方格恰一次再回到原出发的方格？

解

(1) 如图 3.3.6(a) 所示，4 个标号 c 的顶点形成一个 4 圈，4 个标号 d 的顶点也形成一个 4 圈，4 个标号 a 的顶点的度都是 2，每个标号 a 的顶点都与标号是 b 的两个顶点相邻，于是把四个标号 b 的顶点删除后，将得到 6 个连通分支：一个由标号 c 的顶点组成的 4 圈，一个由标号 d 组成的 4 圈，四个孤立顶点 a. 由定理 3.3.3 知图 3.3.6(a) 不是 Hamilton 图，即马从任何方格出发，也不能每格恰跳一次又回到原出发地.

(2) 如图 3.3.6(b)，图上的顶点 a 的度为 2，它们已经在一个 8 圈上，所以这 4 个顶点 a 不可能再在别的圈上，从而这 4 个顶点 a 不会与其余的 21 个顶点形成

Hamilton 圈，它也不是 Hamilton 图.

(3) 图 3.3.6(c) 是 Hamilton 图，按图中的标号从小走到大，即得一个 Hamilton 图，这是一个幻方，它的每行与每列之和皆为 260. □

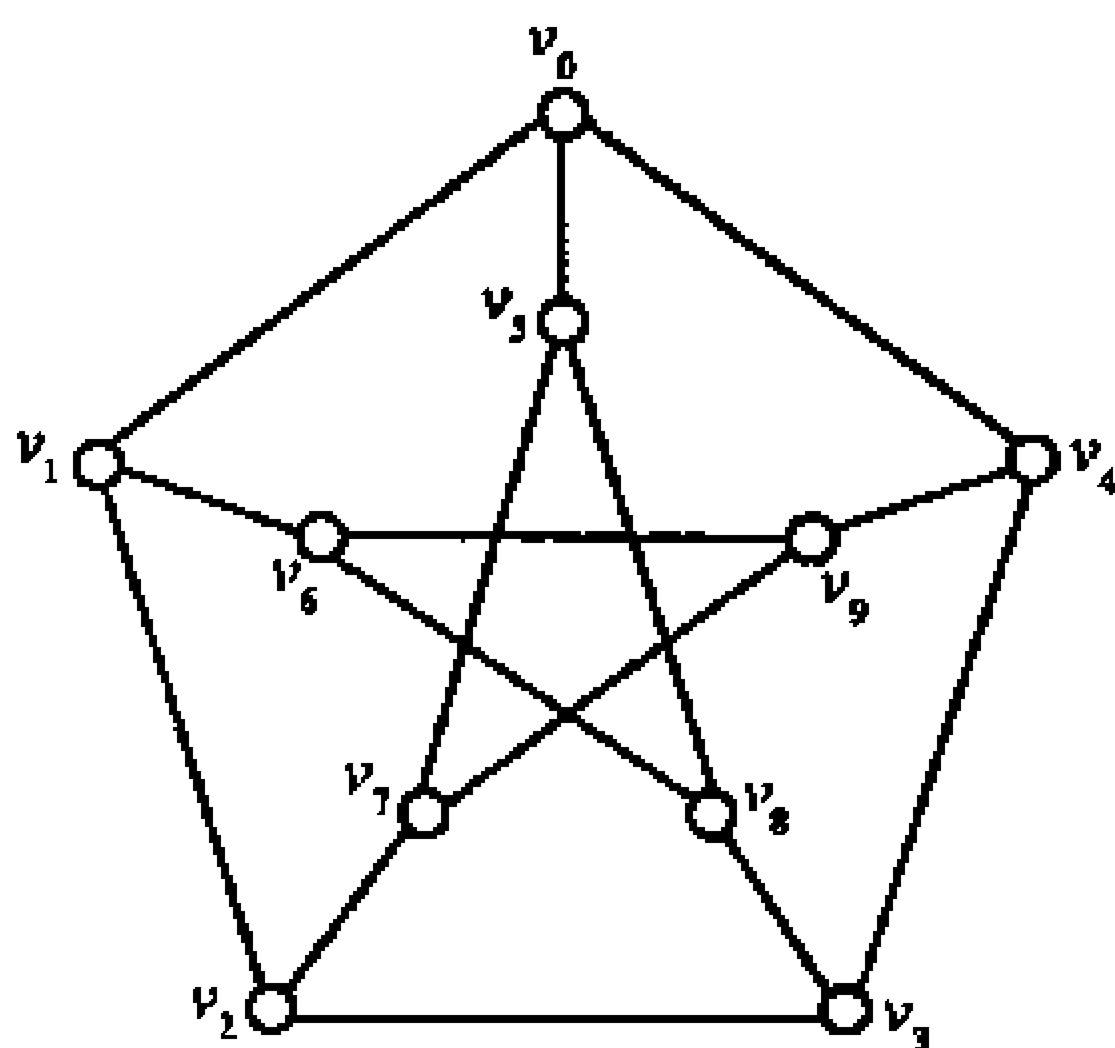


图 3.3.7　Petersen 图

例 3.3.3　证明图 3.3.7 中的 Petersen 图 G 不是 Hamilton 图.

证明　(反证法) 若 Petersen 图是 Hamilton 图，则它必有 Hamilton 圈 C，即 C 上包含 G 的所有顶点，且每个顶点在 C 上的度均为 2. 我们注意到，边子集 $E' = \{v_0v_5, v_1v_6, v_2v_7, v_3v_8, v_4v_9\}$ 是 G 的一个边割，故 C 上必含有 E' 中偶数条边.

若 C 上含有 E' 中四条边，不妨设这四条边为 $v_0v_5, v_1v_6, v_2v_7, v_3v_8$，即 C 上不含边 v_4v_9. 考察顶点 v_4 和 v_9，由于它们在 C 上的度均为 2，故 C 上必含有边 $v_6v_9, v_7v_9, v_0v_4, v_3v_4$. 再考察顶点 v_6 和 v_7，知 C 上必不含边 v_6v_8 和边 v_5v_7，从而 C 上必含边 v_5v_6. 于是，G 的 Hamilton 圈 C 上必含圈 $v_0v_5v_6v_4v_0$ 矛盾.

同理可证，C 上也不可能含有 E' 中两条边. 故 Petersen 图不是 Hamilton 图. □

对于 Petersen 图，无法用本节中所介绍的结论判定它是否为 Hamilton 图，我们只能针对它自身的特点去判定. 如何判定一个一般图是否为 Hamilton 图，仍是图论中尚待解决的主要难题之一. Hamilton 图是应用很广的一类图，关于 Hamilton 图还有很多充分条件，这里我们不再赘述.

3.4　坚韧度

连通度和边连通度都是刻画图的连通性的有力工具，但是随着图论的深入发展，人们发现它们又存在明显的不足之处. 如图 3.4.1 中的三个图 G_1, G_2 和

G_3，显然，这三个图的连通度都是1，边连通度也都是1，但它们的连通程度是不同的．一般说来，我们认为 G_1 的连通性比 G_2 好，而 G_2 的连通性又比 G_3 好．原因在于若从 G_1 删去 v_1，则剩下的图有二个连通分支；在 G_2 中删去 v_2，则剩下的图有三个连通分支；而在 G_3 中删去 v_3，剩下的图就是四个孤立顶点，有四个连通分支．由此可以看出，只考虑导致图不连通所需去掉的顶点数或边数是不够的，还要进一步考虑使图变得不连通的程度，即连通分支的数目．本节我们将介绍另外一个刻画图的连通程度的度量，那就是图的坚韧度．

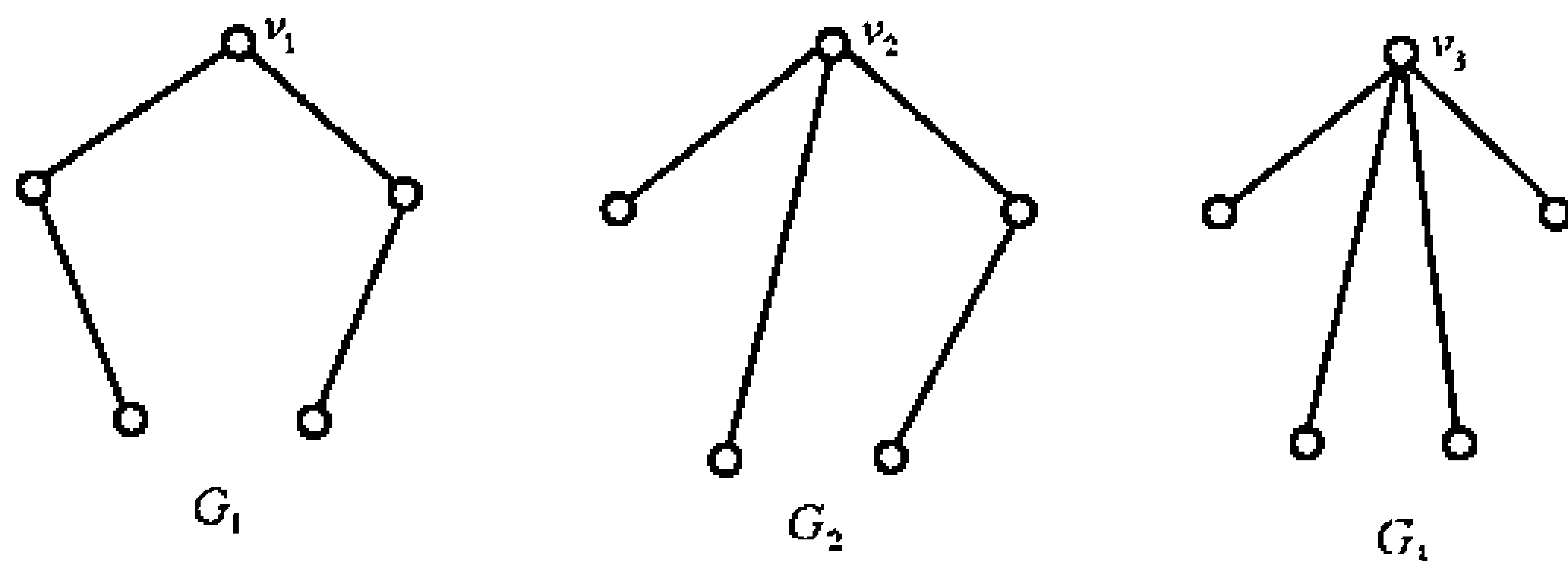


图 3.4.1 图的连通程度

设 G 是 ν 阶图，且至少有一对相异顶点不相邻，则 G 的坚韧度（toughness）记作 $t(G)$，定义为

$$t(G) = \min\left\{ \frac{|S|}{\omega(G-S)} \,\middle|\, S \subseteq V(G), \omega(G-S) \geqslant 2 \right\}.$$

当图 G 中任何两个顶点都相邻时，规定 G 的坚韧度为 $\nu(G)-1$．

若一个图的坚韧度大于或者等于 t，则称 G 是 t 坚韧图（t-tough graph）．若存在 $S^* \subseteq V(G)$，$\omega(G-S^*) \geqslant 2$，且 S^* 满足

$$t(G) = \frac{|S^*|}{\omega(G-S^*)},$$

则称 S^* 为 G 的坚韧度顶点集（toughness vertex set），简称为坚韧集．显然，一个连通图 G 给定，$t(G)$ 便惟一确定了，但坚韧集却不一定惟一．对于图3.4.2中图 G，易知 $t(G)=1$，但 $S_1=\{v_1,v_3\}$，$S_2=\{v_2,v_4,v_6\}$ 都是 G 的坚韧集，S_1 与 S_2 不但不相交，而且它们所包含的顶点数目也是不相同的，因此，图 G 的坚韧集不惟一．

在图3.4.1中有三个图 G_1，G_2 和 G_3，我们知道 $t(G_1)=\frac{1}{2}$，$t(G_2)=\frac{1}{3}$，$t(G_3)=\frac{1}{4}$，因此，用坚韧度的概念来衡量这三个图，就立刻可以看出这三个图连通程度的差别了，G_2 的连通性比 G_3 的好，比 G_1 差．

因此，在坚韧度意义下，坚韧度越大，图的连通性就越好；反之，坚韧度越小，

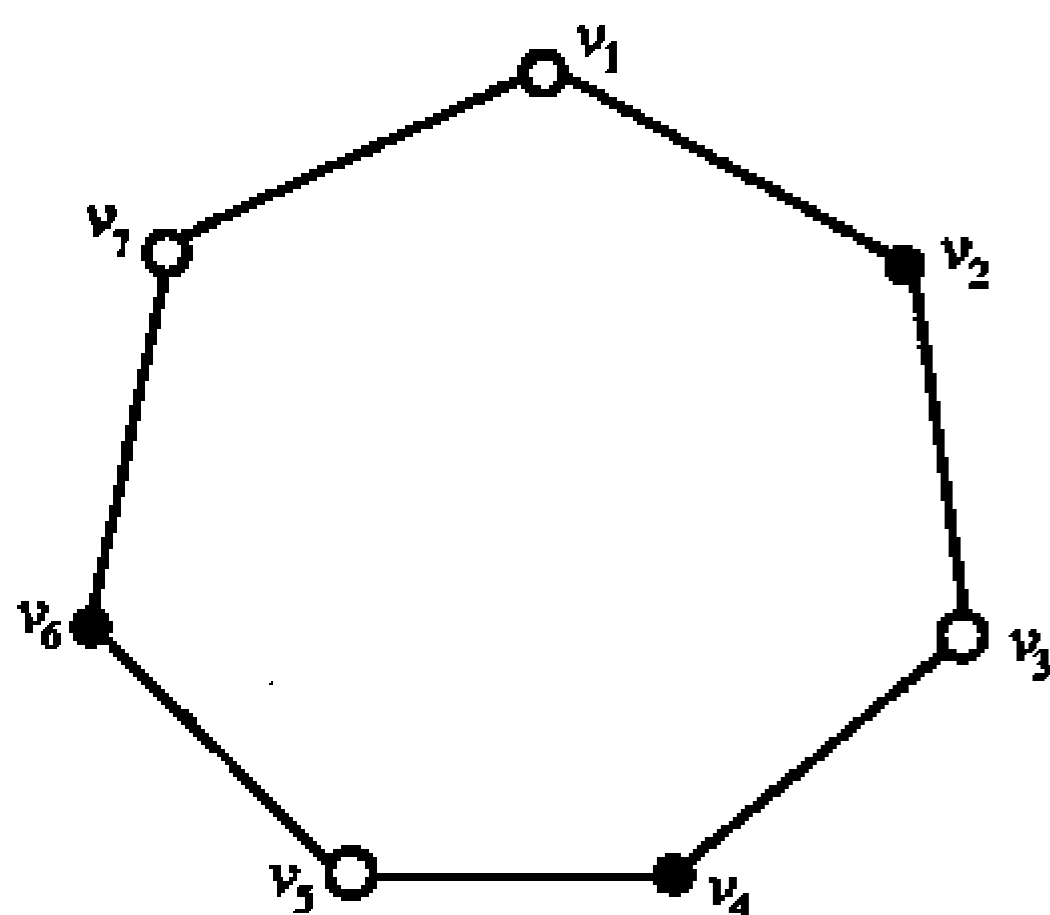


图 3.4.2　图 G 的坚韧度

图的连通性就越差，此与连通度和边连通度相一致.

由图的坚韧度的定义，容易得到如下定理.

定理 3.4.1　设 ν 阶连通图 G 中至少有一对相异顶点不相邻，则

$$\frac{1}{\nu(G)-1} \leqslant t(G) \leqslant \frac{\nu(G)-1}{2}.$$

证明　由假设可知，存在 $S \subseteq V(G)$，使得 $\omega(G-S) \geqslant 2$. 对任意这样的 $S \subseteq V(G)$，有

$$1 \leqslant |S| \leqslant \nu(G)-1,$$

$$2 \leqslant \omega(G-S) \leqslant |V(G-S)| \leqslant |V(G)| - |S| \leqslant \nu(G)-1,$$

从而由 $t(G)$ 的定义得

$$\frac{1}{\nu(G)-1} \leqslant t(G) \leqslant \frac{\nu(G)-1}{2}.$$ □

特别地，若图 G 是树，则有下面的定理.

定理 3.4.2　设 T 是树，Δ 表示 T 的最大度，则有

$$t(T) = \frac{1}{\Delta}.$$

证明　首先我们证明，对任意的 1 顶点割 $S = \{v\}$，有 $\omega(T-S) = d(v)$. 因为 T 无圈，所以 v 的邻域 $N(v)$ 中任意两顶点不在 $T-v$ 的同一连通分支中，即 $\omega(T-v) \geqslant d(v)$. 另一方面，又由 T 连通知，$\omega(T-v) \leqslant d(v)$. 因此必有 $\omega(T-v) = d(v)$.

当然，对任意无圈图 G，易见 $\omega(G-v) = \omega(G) - 1 + d_G(v)$.

设 v_0 为度最大的顶点，即 $d(v_0) = \Delta$，取 $S_0 = \{v_0\}$，由前证 $\omega(T-S_0) = \Delta$，于是 $t(T) \leqslant \dfrac{|S_0|}{\omega(T-S_0)} = \dfrac{1}{\Delta}$.

下面只需证明 $t(T) \geqslant \dfrac{1}{\Delta}$.

设 $S=\{v_1,\cdots,v_n\}$ 为 T 的任意顶点割，我们将证明 $\omega(T-S)\leqslant\sum_{v\in S}d(v)$. 对 $|S|$ 用归纳法证明. 当 $|S|=1$ 时，由前面的证明知道结论成立. 假设对任意 $|S|\leqslant n-1$，结论都成立. 设 $|S|=n, S'=S\setminus\{v_1\}$，则由归纳假设知 $\omega(T-S')\leqslant\sum_{v\in S'}d(v)$. 记 $T'=T-S'$，因为 T' 是无圈图，所以有 $\omega(T'-v_1)=\omega(T')-1+d_{T'}(v_1)$，从而有

$$\omega(T-S)=\omega(T'-v_1)<\omega(T')+d_{T'}(v_1)$$
$$\leqslant\sum_{v\in S'}d(v)+d_T(v_1)=\sum_{v\in S}d(v).$$

由归纳原理知结论成立，因此对任意顶点割 S，有

$$\omega(T-S)\leqslant\sum_{v\in S}d(v)\leqslant|S|\cdot\Delta.$$

于是 $\dfrac{|S|}{\omega(T-S)}\geqslant\dfrac{|S|}{|S|\cdot\Delta}=\dfrac{1}{\Delta}$. 由 S 的任意性知 $t(T)\geqslant\dfrac{1}{\Delta}$. □

由于链也是树，且最大度是 $2(\nu\geqslant 3)$，由定理 3.4.2 易得如下推论：

推论 3.4.3 设 P 是长为 $\nu(\nu\geqslant 3)$ 的链，则 $t(P)=\dfrac{1}{2}$. □

图的坚韧度的概念是由 Chvàtal(1973) 提出来的，当时人们提出这一概念是为了研究图的 Hamilton 性，利用坚韧度的概念，我们可以把定理 3.3.3(1) 叙述成：若 G 是 Hamilton 图，则图 G 是 1 坚韧的. 1971 年，Chvàtal 提出猜想：若 G 是 2 坚韧图，则 G 是 Hamilton 图. 这一猜想至今尚未解决. 但人们围绕这一问题做了大量工作，对图的坚韧度本身也有大量的研究. 例如，有人研究了在顶点数都为 ν、坚韧度都为 t 的图类中可能具有的最大、最小边数是多少，以及如何构造出这样的图. 也有人研究了另一方面问题，即在顶点数都为 ν，边数都为 ε 的图类中，可能具有的最大，最小坚韧度是多少，以及如何构造出这样的图.

与图的坚韧度 $t(G)$ 相对应，Peng, Chen 和 Koh 提出了图 G 的边坚韧度的概念. 设 G 是一个非平凡连通图，则 G 的边坚韧度(edge toughness) 记作 $t'(G)$，定义为

$$t'(G)=\min\left\{\frac{|E'|}{\omega(G-E')-1}\,\middle|\, E'\subseteq E(G),\omega(G-E')\geqslant 2\right\}.$$

如果 G 是平凡图或非连通图，则规定 $t'(G)=0$. 虽然边坚韧度与坚韧度的概念在形式上很相似，但它们在应用上却有很大的差别. 坚韧度主要用于研究图的 Hamilton 性，而边坚韧度则主要用于考察图的边连通性上.

定理 3.4.4 对任何非平凡连通图 G，有 $\dfrac{\kappa'(G)}{2}<t'(G)\leqslant\kappa'(G)$.

证明 设 G 为非平凡连通图，从而 G 中存在边割. 若 E' 为 G 的边割，则

$\omega(G-E')\geqslant 2$,于是有

$$t'(G)=\min\left\{\frac{|E'|}{\omega(G-E')-1}\middle| E'\subseteq E(G),\omega(G-E')\geqslant 2\right\}$$
$$\leqslant \min\{|E'|\,|E'\text{为}G\text{的边割}\}=\kappa'(G).$$

下面证明 $\frac{\kappa'(G)}{2}<t'(G)$.

对任意使 $\omega(G-E')\geqslant 2$ 的边子集 E',设 $\omega(G-E')=n+1$,$G_1,G_2,\cdots,G_{n+1}$ 为 $G-E'$ 的各连通分支.由 G 连通知,$E_i=[V(G_i),V(G)\setminus V(G_i)]$ 为 G 的边割($i=1,2,\cdots,n+1$).不妨设 $|E_1|=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n+1}|E_i|$,则 $|E'|\geqslant\frac{n+1}{2}|E_1|$,于是

$$\frac{|E'|}{\omega(G-E')-1}=\frac{|E'|}{n}\geqslant\frac{n+1}{2n}|E_1|>\frac{|E_1|}{2}.$$

由 E' 的任意性,即知 $t'(G)>\frac{\kappa'(G)}{2}$. □

另外,需要说明的是,对任意满足$\frac{r}{2}<s\leqslant r$ 的整数 r 和 s,存在图 G,使得 $\kappa'(G)=r$,$t'(G)=s$.对于坚韧度和连通度,则显然有 $t(G)\leqslant\frac{1}{2}\kappa(G)$.

习 题 三

1. 求 $K_{m,n}$,W_n($n+1$ 阶轮图),Petersen 图的连通度和边连通度.

2.(1) 证明:如果 G 是简单图.且 $\varepsilon>\binom{\nu-1}{2}$,则 G 连通;

(2) 对 $\nu>1$,求边数 $\varepsilon=\binom{\nu-1}{2}$的非连通简单图.

3.(1) 证明:如果 G 是简单图且$\delta>\lfloor\frac{\nu}{2}\rfloor-1$,则 G 必连通;

(2) 当 ν 为偶数时,求出一个不连通的简单($\lfloor\frac{\nu}{2}\rfloor-1$) 正则图.

4. 证明:如果 G 是简单图,且 $\delta\geqslant(\nu+k+2)/2$,则 G 为k 连通图(提示:证明从 G 中删去$k-1$ 个顶点之后仍然连通,利用题 2(1) 中的结论).

5. 对任何图 G,证明:$\kappa'(G)=\min\left\{\frac{|E'|}{\omega(G-E')-1}\middle| E'\text{为}G\text{的边割}\right\}$.

6.(1) 设 G 为简单图,且 $\delta(G) \geqslant \nu(G)-2$,证明 $\kappa(G)=\delta(G)$;

(2) 构造简单图 G,满足 $\delta(G)=\nu(G)-3, \kappa(G)<\delta(G)$.

7.(1) 设 $k>0$,又 G 是 k 边连通图,边集 E' 满足 $|E'|=k$,证明:$\omega(G-E') \leqslant 2$;

(2) 给出一个 k 连通图($k>0$),其中存在顶点集 V' 满足 $|V'|=k$,且使得:$\omega(G-V')>2$.

8. 设整数 k 和 l 满足 $1 \leqslant k \leqslant l$,构造图 G_1 和 G_2,满足

(1) 对某一个顶点 x 有 $\kappa(G_1)=k, \kappa(G_1-x)=l$;

(2) 对某一条边 xy 有 $\kappa(G_2-x)=k, \kappa'(G_2-xy)=l$.

9. 证明:不是块的连通图至少有两个块,每个恰有一个割点.

10. 证明:G 中块的个数等于 $\omega+\sum\limits_{v \in V}(b(v)-1)$,其中 $b(v)$ 表示 G 中包含 v 的块的个数.

11. 构造一个 ν 为偶数、ε 为奇数的 Euler 图.

12. 设 G 为 Euler 图,证明 $\omega(G-v) \leqslant \frac{1}{2}d(v)$.

13. 对于哪些 n, K_n 和 W_n 是 Hamilton 图?

14. 证明:如果 G 中有割边或 G 是顶点数为奇数的二部图,则 G 不是 Hamilton 图.

15. 证明:如果简单图 G 满足 $\nu \geqslant 3$,且 $\varepsilon \geqslant \binom{\nu-1}{2}+2$,则 G 是 Hamilton 图.

16. 一只老鼠想吃位于一个 $3\times3\times3$ 立方体上的乳酪,它要借助于打洞的方法通过所有的 27 个 $1\times1\times1$ 的子立方体.如果它从一个角上开始,依次走向未吃的立方体,问它吃完时能否恰在立方体的中心?

17. 设 G 是 k 边连通图,若 $G-v(\forall v \in V(G))$ 不再是 k 边连通图,则称 G 是临界 k 边连通图;若 $G-e(\forall e \in E(G))$ 不再是 k 边连通图,则称 G 是极小 k 边连通图.

(1) 证明 6 阶临界 2 边连通图的最大边数是 7;

(2) 证明 6 阶极小 2 边连通图中度为 2 的顶点数至少有 4 个.

18. 求 $t(K_{m,n})$ 和 $t(W_n)$.

19. 试构造图 G 满足 $\kappa'(G)=3$,而 $t'(G)=2$.

20. 试构造边数最多的 n 阶图 G 满足 $t(G)=\frac{3}{2}$.

第四章　匹配与相异代表系

独立集和覆盖是图论研究的主要内容之一．本章将重点介绍关于二部图匹配的 Hall 定理，并将其推广，给出判定一个集族存在相异代表系的充要条件，还讨论了相异代表系的应用和存在完美匹配的充要条件．

4.1　独立集和覆盖

图的独立集是图论研究的主要对象之一．

设 S 是图 G 的顶点集 $V(G)$ 的子集，若 S 中任意两个顶点在 G 中都不相邻，即 $G[S]$ 是空图，则称 S 是 G 的一个顶点独立集，简称为独立集(independent set)．反过来，若 S 中任意两个相异顶点在 G 中都相邻，即 $G[S]$ 是完全图，则称 S 是 G 的一个团(clique)．k 个顶点的独立集称为 k 独立集(k independent set)；k 个顶点的团称为 k 团(k clique)．显然，简单图 G 的任何一个顶点都是它的 1 独立集，也是 1 团．易知，S 是简单图 G 的团，当且仅当 S 是 G 的补图 $\bar{G}$ 的独立集．由于空集 $\emptyset$ 是任何图的独立集，并且图 G 中每个独立集的任何子集仍是 G 的独立集，因此我们感兴趣的是最大独立集．G 中顶点数最多的独立集称为是 G 的最大独立集(maximum independent set)．G 中最大独立集的顶点数叫做图 G 的独立数，记作 $\alpha(G)$．例如，对于图 4.1.1 中的图 G，$\{z, v\}$ 是 G 的 2 独立集，但它不是最大独

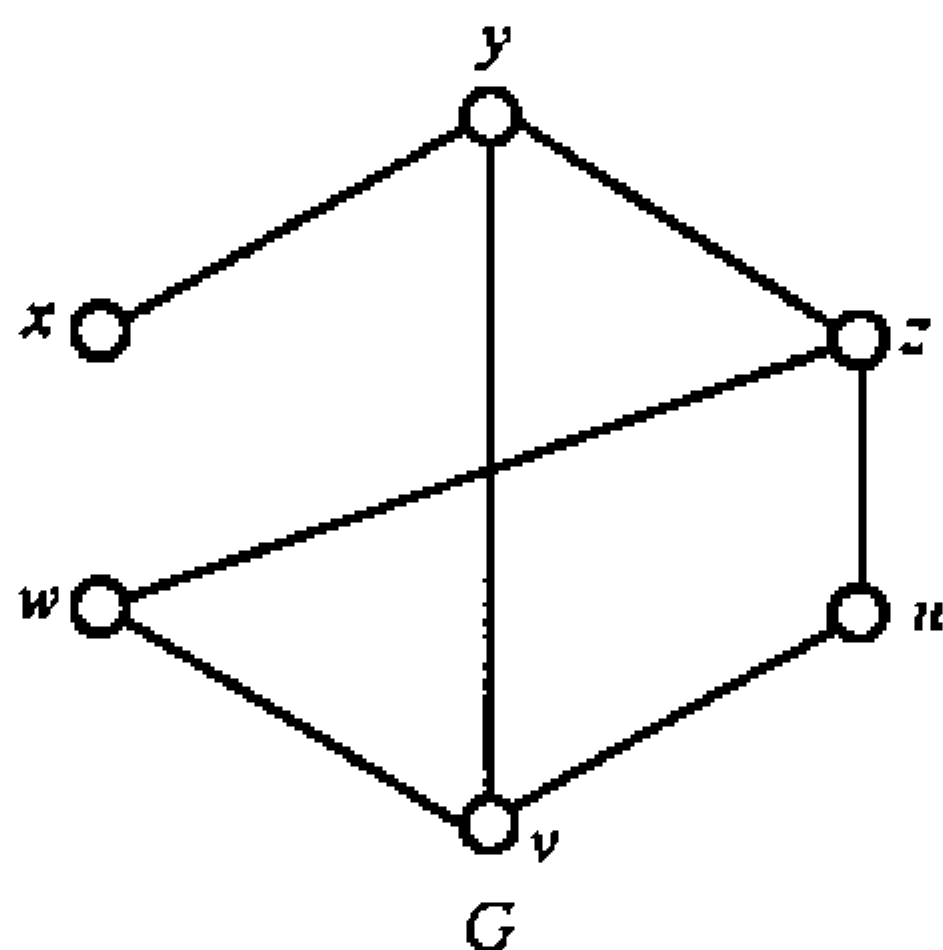


图 4.1.1　图的独立集

立集. $\{y,u,w\}$, $\{x,z,v\}$, $\{x,w,z\}$ 和 $\{x,w,u\}$ 都是 G 的最大独立集, 因此, G 的独立数 $\alpha(G)=3$.

例 4.1.1　假设在某种信号传输中, 基本信号集 $B=\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$. 已知线路失真和其他异常情况会导致有些信号发生错乱. 信号 b_i 与 b_j 发生错乱是指或者输入为 b_i 但输出为 b_j, 或者输入为 b_j 而输出为 b_i, $i\neq j$. 对于这些情况, 聪明的做法是不用整个基本信号集 B, 而是从 B 中选择具有如下特性的一个最大子集 B_1, 使 B_1 中的任何两个信号都不发生错乱. 用顶点 v_i 表示信号 b_i $(i=1,2,\cdots,n)$, 当且仅当 b_i 与 b_j 发生错乱时, 在 v_i 与 v_j 之间连一条边, 从而得到一个 n 阶简单图 G. 于是求上述的 B_1 等价于求 G 的最大独立集. □

在一个图中, 与独立集相应的是边独立集(edge-independent set). 所谓边独立集就是两两不相邻的连杆的集合. 边独立集有一个更形象、更常用的名称叫做匹配(matching), 在以后各章中我们只用匹配这一概念, 而在本章, 为了与点独立集相对应, 我们仍用边独立集这一名称. 边数最多的边独立集称为最大边独立集(maximum edge-independent set). G 中最大边独立集的边数叫做 G 的边独立数, 记作 $\alpha'(G)$. 例如 $\{xy,uv,zu\}$ 是图 4.1.1 中图 G 的最大边独立集, 因此, 图 G 的边独立数 $\alpha'(G)=3$.

例 4.1.2　第二次世界大战时, 英国某飞行大队由来自世界各地的 n 名飞行员组成, 飞行大队的每架飞机必须由两名飞行员驾驶. 但由于语言和训练方式等诸种原因, 某些飞行员适合同机飞行, 另一些飞行员则不能同机飞行. 问应怎样搭配飞行员, 才能使尽可能多的飞机同时飞行?

每个飞行员用一个顶点表示, 当且仅当两个飞行员适合同机飞行时, 在相应的顶点间连一条边, 这样得到了一个 n 阶简单图 G. 上述飞行员搭配问题就相当于求 G 的最大边独立集. □

图 G 的覆盖(covering)是指 G 的顶点集的一个子集, 它包含 G 的每一条边的至少一个端点. 因为 $V(G)$ 是 G 的一个覆盖, 所以任何图都存在覆盖. 顶点数最少的覆盖称为最小覆盖(minimum covering). G 中最小覆盖的顶点数称为 G 的覆盖数, 记作 $\beta(G)$. 例如, 对于图 4.1.1 中图 G, $\{x,v,z\}$ 是它的最小覆盖, 即 $\beta(G)=3$.

例 4.1.3　设某市交警队要在主要街道的某些交叉路口设置岗亭, 假设每个岗亭上的交警能观察到该路口的所有街道的交通状况. 为了保证交通的畅通, 应当使全城所有主要街道的交通状况都在交警的视线中, 问至少要设置多少个岗亭?

我们把主要街道的交叉路口用顶点表示, 两个交叉路口之间的一段街道对

应于相应顶点之间的一条边，得到简单图 G. 岗亭设置问题等价于求 G 的覆盖数. □

定理4.1.1　设 K,M 分别为图 G 的覆盖和边独立集，若 $|K|=|M|$，则 K，M 分别是图 G 的最小覆盖和最大边独立集.

证明　因为 K 包含 M 中每一条边的至少一个端点，而且 M 中任何两条边都不会有公共端点，故必有 $|M|\leqslant|K|$. 特别地，对于图 G 的最大边独立集 M^* 和最小覆盖 $\widetilde{K}$，亦有 $|M^*|\leqslant|\widetilde{K}|$. 于是

$$|M|\leqslant|M^*|\leqslant|\widetilde{K}|\leqslant|K|.$$

由于已知 $|M|=|K|$，因此必有 $|M|=|M^*|=|\widetilde{K}|=|K|$，从而 M 为最大边独立集，K 为最小覆盖. □

定理4.1.2　设 S 是顶点集 $V(G)$ 的一个子集，则 S 是 G 的独立集的充要条件是 $V(G)\setminus S$ 为 G 的覆盖.

证明

($\Rightarrow$) 设 S 是 G 的独立集，则 G 的任何一条边都至少有一个端点是 $V(G)\setminus S$ 中的顶点，故 $V(G)\setminus S$ 是 G 的覆盖.

($\Leftarrow$) 设 $V(G)\setminus S$ 是 G 的覆盖，即 G 的任何一条边都至少有一个端点属于 $V(G)\setminus S$，从而 G 的任何一条边都不可能有两个端点都在 S 中，亦即 S 中任何两个顶点都不相邻，故 S 是 G 的独立集. □

定理4.1.3　对任何图 G，有 $\alpha(G)+\beta(G)=\nu(G)$.

证明　设 S 是 G 的一个最大独立集，K 为 G 的最小覆盖，则由定理4.1.2知，$V(G)\setminus K$ 是 G 的独立集，$V(G)\setminus S$ 是 G 的覆盖，因此，

$$\nu(G)-\beta(G)=|V(G)\setminus K|\leqslant\alpha(G),$$

即 $\alpha(G)+\beta(G)\geqslant\nu(G)$.

同理有 $\nu(G)-\alpha(G)=|V(G)\setminus S|\leqslant\beta(G)$，即有 $\alpha(G)+\beta(G)\leqslant\nu(G)$. 于是 $\alpha(G)+\beta(G)=\nu(G)$. □

与覆盖相对应的概念是边覆盖. 设 L 是图 G 的边集 $E(G)$ 的一个子集，如果 G 的每个顶点都是 L 中某条边的端点，则称 L 是 G 的边覆盖(edge-covering). 显然，一个图有边覆盖的充要条件是它没有孤立点. 当图 G 没有孤立点时，它的边集 $E(G)$ 就是一个边覆盖，而这样的边覆盖没有太多意义，我们关心的是边数最少的边覆盖，称这样的边覆盖为最小边覆盖(minimum edge-covering). G 中最小边覆盖的边数叫做 G 的边覆盖数，记作 $\beta'(G)$. 例如，对于图 4.1.1 中的图 G，$\{xy,uz,uv\}$ 是最小边覆盖，因此，图 G 的边覆盖数 $\beta'(G)=3$.

由定理 4.1.2 和定理 4.1.3 知，独立集和覆盖之间有很强的关系，但边独立

集和边覆盖之间却没有这么好的关系.如在长为3的链 $P_3 = v_1v_2v_3v_4$ 中,$\{v_1v_2, v_3v_4\}$ 为 P_3 的边独立集,但 $E(P_3)\setminus\{v_1v_2, v_3v_4\} = \{v_2v_3\}$ 不是 P_3 的边覆盖;又如在 K_4 中,任意两条不相邻的边都是边覆盖,其补集有4条边,并不是 K_4 的边独立集.然而边独立数 $\alpha'(G)$ 和边覆盖数 $\beta'(G)$ 之间仍然存在着类似于定理4.1.3的简单关系,这就是著名的 Gallai 定理.

定理 4.1.4(Gallai, 1959) 若 $\delta(G)>0$,则 $\alpha'(G)+\beta'(G)=\nu(G)$.

证明 设 M 是 G 的最大边独立集,U 是不与 M 中边关联的顶点集合,则 $|M|=\alpha'(G)$, $|U|=\nu-2\alpha'(G)$.因为 $\delta(G)>0$,M 是最大边独立集,所以 U 中任何两个相异顶点不相邻,且 U 的每个顶点都有 $E(G)\setminus M$ 的边与之关联,从而存在 $E'\subseteq E(G)\setminus M$, $|E'|=|U|$,且 E' 中每条边恰好与 U 中一个顶点关联,显然 $M\cup E'$ 是 G 的边覆盖,因此,

$$\begin{aligned}\beta'(G)&\leqslant|M\cup E'|=|M|+|E'|=|M|+|U|\\&=\alpha'(G)+(\nu-2\alpha'(G))=\nu-\alpha'(G).\end{aligned}$$

于是 $\alpha'(G)+\beta'(G)\leqslant\nu(G)$.

设 L 是 G 的最小边覆盖,令 $H=G[L]$,则 $\nu(H)=\nu(G)=\nu$.设 M 是 H 的最大边独立集,用 U 表示 H 中不与 M 中的边关联的顶点的集合,故 $|U|=\nu-2|M|$.因为 $\delta(H)>0$,M 是 H 的最大边独立集,所以由前面的证明中类似的讨论知,存在 $E'\subseteq E(H)\setminus M=L\setminus M$, $|E'|=|U|$,从而 $|L\setminus M|\geqslant|U|$,即

$$|L|-|M|=|L\setminus M|\geqslant|U|=\nu-2|M|,$$

故 $|L|+|M|\geqslant\nu$.

因为 H 是 G 的子图,所以 M 是 G 的边独立集,于是 $\alpha'(G)\geqslant|M|$,即 $\alpha'(G)+\beta'(G)\geqslant\nu(G)$.综上所述,$\alpha'(G)+\beta'(G)=\nu(G)$. □

独立集的概念类似于边独立集的概念,但它们在理论研究上却有很大不同.关于边独立集(即匹配)的有关结论,我们将在下一节介绍.相对而言,我们对独立集却知之甚少,特别是目前还不知道求图的最大独立集的有效算法.独立集与连通度之间有密切联系.若顶点子集 S 是图 G 的独立集,则 $V(G)-S$ 就是 G 的一个顶点割,易知 $\alpha(G)+\kappa(G)\leqslant\nu(G)$.下面的定理给出了独立数与连通度之间的关系.

定理 4.1.5(Bondy, 1978) 设 G 是 $\nu(\geqslant 2)$ 阶简单图,且对 G 中任何不相邻的相异顶点 x 和 y,均有 $d(x)+d(y)\geqslant\nu$,则 $\alpha(G)\leqslant\kappa(G)$.

证明 由已知条件易证 G 是连通图.若 G 为完全图 K_ν,则 $\alpha(K_\nu)=1\leqslant\nu-1=\kappa(K_\nu)$,结论成立.下设 G 不是完全图.

(反证法)若 $\alpha(G)\geqslant\kappa(G)+1$,设 S 和 T 分别是 G 中最大独立集和最小顶

点割，则有

$$|S| = \alpha(G) = \alpha \geqslant 2, \quad |T| = \kappa(G) = k.$$

设 $G_1, G_2, \cdots, G_l$ 是 $G-T$ 的连通分支，$l \geqslant 2$，则由 S 是独立集知

$$|N_G(x) \cup N_G(y)| \leqslant \nu - \alpha, \ \forall x, y \in S.$$

于是 $\forall x, y \in S$，有

$$\begin{aligned}|N_G(x) \cap N_G(y)| &= |N_G(x)| + |N_G(y)| - |N_G(x) \cup N_G(y)| \\ &= d_G(x) + d_G(y) - |N_G(x) \cup N_G(y)| \\ &\geqslant \nu - (\nu - \alpha) = \alpha \geqslant k+1.\end{aligned}$$

注意到，与属于 $G-T$ 的不同连通分支的两顶点同时相邻的顶点只能属于 T，而 $|T| = k < k+1$. 故上式表明，在 $G-T$ 中，恰有一个连通分支含 S 中顶点. 不妨设 $S \subseteq V(G_1) \cup T$，$x \in V(G_1) \cap S$. 令 $y \in V(G_2)$，则

$$\begin{aligned}|N_G(x) \cup N_G(y)| &\leqslant \nu - |S \cap V(G_1)| - 1 \\ &= \nu - \alpha + |S \cap T| - 1.\end{aligned} \tag{4.1.1}$$

又因为 $N_G(x) \cap N_G(y) \subseteq T \setminus S$，所以

$$|N_G(x) \cap N_G(y)| \leqslant k - |S \cap T|. \tag{4.1.2}$$

综合式(4.1.1) 和式(4.1.2) 得

$$\begin{aligned}d_G(x) + d_G(y) &= |N_G(x) \cup N_G(y)| + |N_G(x) \cap N_G(y)| \\ &\leqslant (\nu - \alpha + |S \cap T| - 1) + (k - |S \cap T|) \\ &= \nu - \alpha + k - 1 \leqslant \nu - 2,\end{aligned}$$

与已知矛盾. 所以 $\alpha(G) \leqslant \kappa(G)$. □

由定理 4.1.5 立即得到推论 4.1.6.

推论 4.1.6　设 G 是 $\nu(\geqslant 2)$ 阶简单图，若 $\delta \geqslant \frac{\nu}{2}$，则 $\alpha(G) \leqslant \kappa(G)$.

□

定理 4.1.5 中条件"对任何不相邻的相异顶点 x 和 y，均有 $d_G(x) + d_G(y) \geqslant \nu$" 不能减弱为"对任何不相邻的相异顶点 x 和 y，均有 $d_G(x) + d_G(y) \geqslant \nu - 1$". 如图 4.1.2 中图 G_1，易见 $\alpha(G_1) = 3 > 2 = \kappa(G_1)$.

定理 4.1.7(Chvátal, Erdös, 1972)　设 G 是 $\nu(\geqslant 3)$ 阶简单图，若 $\kappa(G) \geqslant \alpha(G)$，则 G 是 Hamilton 图.

证明　若 $\alpha(G) = 1$，则 G 是 ν 阶完全图，因而是 Hamilton 图. 下设 $\alpha(G) \geqslant 2$. 由于 $\kappa(G) \geqslant \alpha(G) \geqslant 2$，所以 G 含圈. 设 C 是 G 中最长圈，下面证明 C 中含有 G 的全部顶点.

(反证法) 若 C 不含 G 中所有顶点，则 $V(G) \setminus V(C)$ 非空. 令 H 是 $G - V(C)$

图 4.1.2 反例

的任何一个连通分支，并令$\{x_1, x_2, \cdots, x_l\}$是$C$中与$H$相邻的顶点集．由于$\kappa(G) \geqslant 2$，因此$l \geqslant 2$．由$C$的最长性和$H$的连通性知$x_1, x_2, \cdots, x_l$在$C$上互不相邻．所以$\nu(C) > l$，并且$\{x_1, x_2, \cdots, x_l\}$是$G$的一个顶点割．从而$\kappa(G) \leqslant l$．

给圈C沿顺时针方向定向，取C上的顶点$y_1, y_2, \cdots, y_l$满足$x_iy_i \in E(C)$，且方向为从x_i指向$y_i(i = 1, 2, \cdots, l)$．令$Y = \{y_1, y_2, \cdots, y_l\}$，我们断言$Y$必为$G$的独立集．事实上，若$Y$不是$G$的独立集，即存在$y_iy_j \in E(G)$．令通过$H$中顶点连接$x_i$和$x_j$的$(x_i, x_j)$链为$P_{ij}$，则$C - x_iy_i - x_jy_j + y_iy_j + P_{ij}$是$G$中一条比$C$更长的圈，故$Y$必为$G$的独立集．因$y_i$与$x_i$相邻，故$y_i$不与$H$中任何顶点相邻．任取$y_0 \in V(H)$，则$S = \{y_0, y_1, y_2, \cdots, y_l\}$是$G$的独立集，且

$$\alpha(G) \geqslant |S| = l + 1 \geqslant \kappa(G) + 1,$$

与已知矛盾．于是C必包含G中所有顶点，即G为 Hamilton 图． □

定理4.1.7中条件"$\kappa(G) \geqslant \alpha(G)$"同样不能减弱为"$\kappa(G) \geqslant \alpha(G) - 1$"，如图4.1.2中图$G_2$，显然$G_2$不是 Hamilton 图，且$\kappa(G_2) = 1, \alpha(G_2) = 2$，即有$\kappa(G_2) \geqslant \alpha(G_2) - 1$．

4.2 匹配

所谓匹配就是4.1节中介绍的边独立集．

设M是图G的一个匹配，v是G的一个顶点．若v与M中边关联，则称M饱和v，或v是M的饱和点(M-saturated vertex)，否则称M不饱和v，或称v是M非饱和点(M-unsaturated vertex)．若G中两个顶点u和v与M中同一条边关联，则称u和v在M中配对(mate)．

最大边独立集又称为最大匹配(maximum matching)．显然，G的最大匹配M满足$|M| \leqslant \nu/2$．若G中存在边数为$\nu/2$的匹配M，即G中每个顶点都是M饱和点，则称M是G的完美匹配(perfect matching)．图4.2.1(b)中的粗边集合就是一

个完美匹配.易知,G中匹配M是完美匹配,当且仅当M为G的覆盖.图4.2.1(a)中的粗边集合就是一个最大匹配,但它不是完美匹配,它不饱和顶点v_1和v_3.

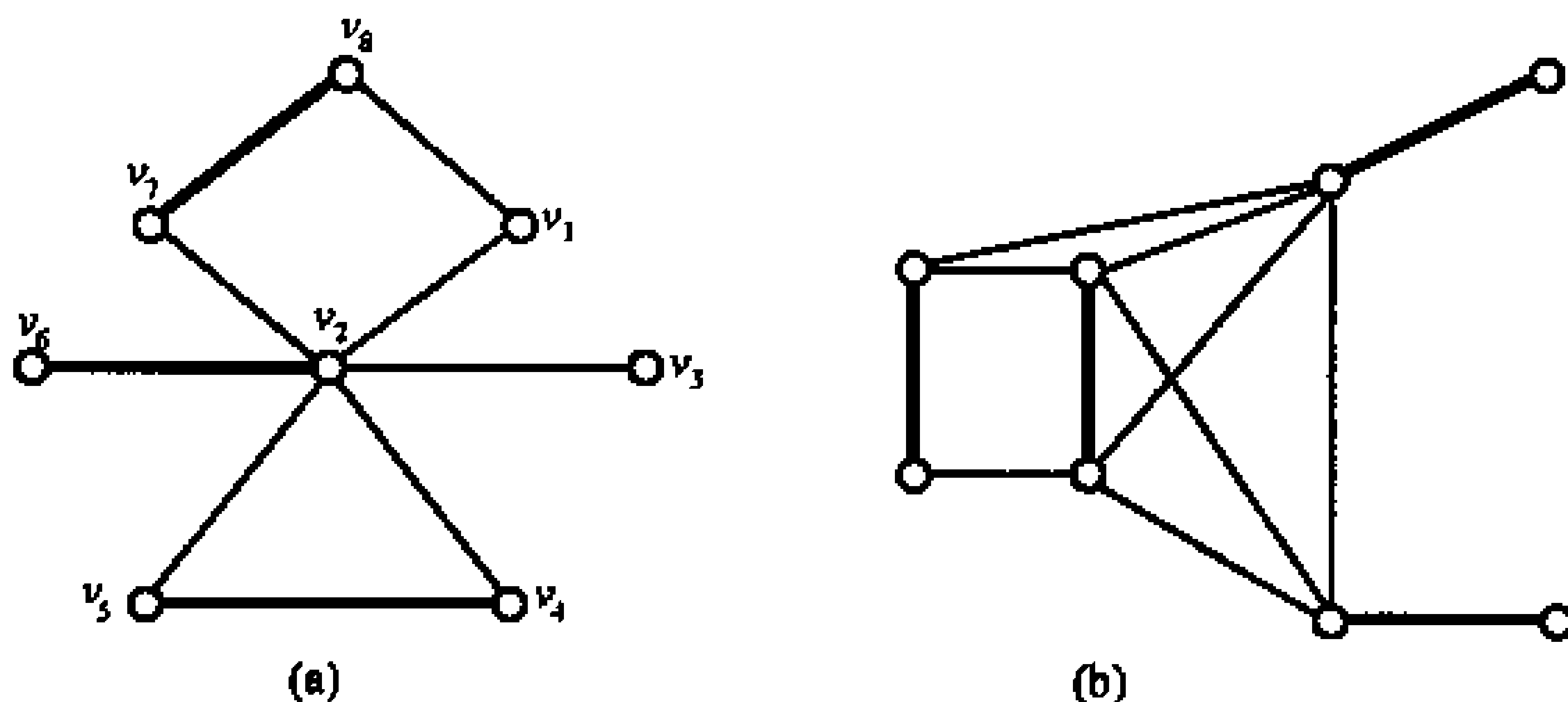


图4.2.1　图的匹配和完美匹配

设M是G的一个匹配,G中一条M交错链(M-alternating chain)是指其边交错地属于$E(G)\setminus M$和M的一条链.例如在图4.2.1(a)图中,取匹配$M=\{v_7v_8, v_2v_6, v_4v_5\}$,则$v_1v_8v_7v_2v_6$是$M$交错链.一条连接两个不同的$M$非饱和点的$M$交错链称为$M$增广链(M-augment chain).显然,若G中存在M增广链,则M必然不是G的最大匹配.这是因为,设$P=v_0e_1v_1\cdots v_{2m}e_{2m+1}v_{2m+1}$是$G$中一条$M$增广链,则

$$M'=M\oplus E(P)=(M\setminus\{e_2,e_4,\cdots,e_{2m}\})\cup\{e_1,e_3,\cdots,e_{2m+1}\}$$

是G的匹配(P上的顶点至多与M'中一条边关联),且$|M'|=|M|+1$,同时,还可以证明它的逆命题成立,即

定理4.2.1(Berge,1957)　图G中匹配M是最大匹配,当且仅当G中不存在M增广链.

证明　只须证明充分性.假设M不是最大匹配,设M'是G的一个最大匹配,则$|M|<|M'|$.

令$H=G[M\oplus M']$.$\forall v\in V(H)$,v要么与M或M'中一条边关联,要么与M和M'中各一条边关联,即$d_H(v)\leqslant 2$,从而H的每个连通分支或者是其边交错地属于M和M'的一个偶圈,或者是其边交错地属于M和M'的一条链.由于$|M'|>|M|$,因此,H中至少有一个连通分支P,它所包含的属于M'的边比属于M的边要多.显然这个连通分支P只能是一条链,且起点和终点都是M'饱和点,即M非饱和点,故P是一条M增广链.　□

由Berge定理,M增广链就是能使M的边数增加的M交错链,这启发我们可以通过寻找增广链的方法来找出图的最大匹配.

4.3 二部图的匹配和覆盖

首先我们来介绍一类重要问题 —— 指派问题(assignment problem),也称为人员分配问题.设某单位有 m 名工作人员 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 和 n 项工作 $y_1,y_2,\cdots,y_n$,问能否给每个人恰好分配一项他胜任的工作,且每项工作至多分配给一名胜任该项工作的人员?这个问题可以用图论的语言予以表达,令 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$, $Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$,构造二部图 $G=(X,Y,E)$ 如下:$\forall 1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n$,当且仅当人员 x_i 胜任工作 y_j 时,$x_iy_j\in E$.于是指派问题就等价于问 G 中是否存在一个饱和 X 的所有顶点的匹配.

对于指派问题,下面的 Hall 定理给出了这种分工方案是否存在的一个充要条件.为了方便叙述,先引进一个记号.设 S 是图 G 的顶点集 $V(G)$ 的一个子集,称 $N_G(S)=\bigcup\limits_{v\in S}N_G(v)$ 为 S 在 G 中的邻域.在不致混淆的情况下,$N_G(S)$ 简记为 $N(S)$.

定理4.3.1(Hall,1935) 设 $G=(X,Y,E)$ 是二部图,则 G 中存在饱和 X 的每个顶点的匹配,当且仅当

$$|N(S)|\geqslant|S|,\forall S\subseteq X.$$

证明

($\Rightarrow$) 设 M 是 G 的一个饱和 X 中所有顶点的匹配,且 $S\subseteq X$.因为 S 的每个顶点都是 M 饱和点,所以 S 的每个顶点必与 $N(S)$ 中某个顶点在 M 中配对,而且由匹配的定义,与 S 中不同的顶点配对的顶点是不同的,所以 $|N(S)|\geqslant|S|$.

($\Leftarrow$)(反证法) 设 M^* 是 G 的一个最大匹配,M^* 不饱和 X 的所有顶点.设 u 是 X 中一个 M^* 非饱和点,Z 是 G 中所有通过 M^* 交错链与 u 相连接的顶点的集合,故 $u\in Z$.令

$$S=X\cap Z,T=Y\cap Z.$$

因为 M^* 是最大匹配,所以 G 中不存在 M^* 增广链,因此,除 u 外,Z 中每个顶点都是 M^* 饱和点,而且 $Z\setminus\{u\}$ 中顶点在 M^* 中两两配对.于是 $|T|=|S\setminus\{u\}|=|S|-1$.

现在证明 $N(S)=T$.由于对任意 $y\in T$,G 中有一条由 u 到 y 的 M^* 交错链 Q,因此,由 G 是二部图知,在 Q 上与 y 相邻的顶点必属于 X,即属于 S,从而 $y\in N(S)$.另一方面,对任意的 $y\in N(S)$,记 S 中与 y 相邻的顶点为 x,令 P 是从 u 到 x 的 M^* 交错链.若 y 在 P 上,则 P 的 (u,y) 节是一条从 u 到 y 的 M^* 交错链,即 $y\in T$;否则,因 $u\in X,x\in X$,故 P 的长度为偶数,其最后一条边是 M^* 中

的边，从而 $xy \notin M^*$，于是 $P+xy$ 是从 u 到 y 的 M^* 交错链，即 $y \in T$，这就证明了 $N(S)=T$.从而

$$|N(S)|=|T|<|S|,$$

此与充分性的假设相矛盾. □

将 Hall 定理应用到正则二部图，可得

推论 4.3.2　设 G 是 k 正则二部图，$k>0$，则 G 有完美匹配.

证明　设 $G=(X,Y,E)$ 是 k 正则二部图，从而有 $k|X|=|E|=k|Y|$，而 $k>0$，故 $|X|=|Y|$.

$\forall S \subseteq X$，设 E_1 是与 S 中顶点关联的边的集合，E_2 是与 $N(S)$ 中顶点关联的边的集合，由此有 $E_1 \subseteq E_2$，于是

$$k|N(S)|=|E_2|\geqslant|E_1|=k|S|,$$

从而 $|N(S)|\geqslant|S|$.由 Hall 定理知，G 中存在饱和 X 的所有顶点的匹配，设为 M.因为 $|X|=|Y|$，故 M 是 G 的一个完美匹配. □

推论4.3.2中条件“G是二部图”是必不可少的，图4.3.1中图就是3正则图，但它没有完美匹配.实际上，对任何 $k\geqslant 2$，存在 k 正则简单图使其不含完美匹配.

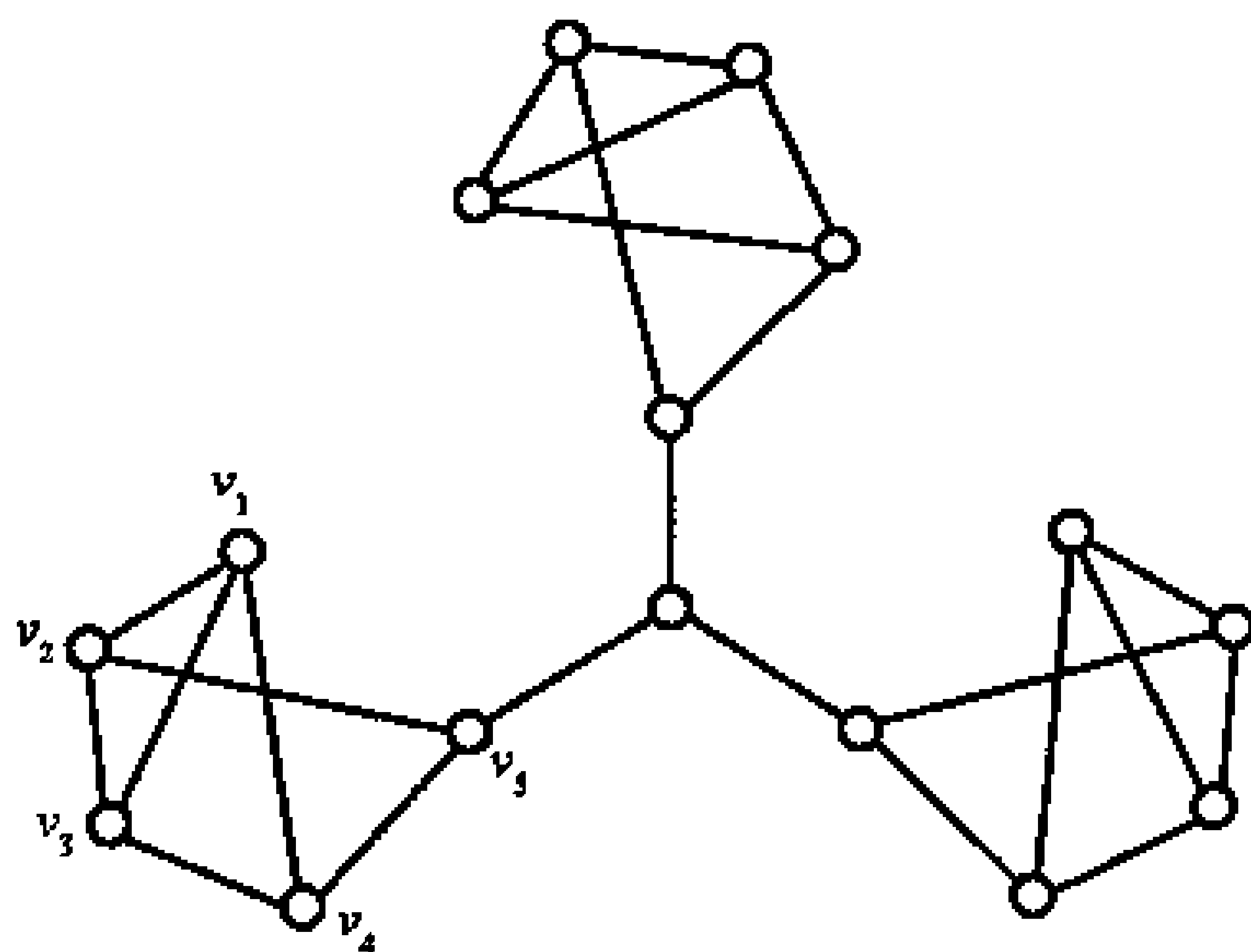


图 4.3.1　3 正则图且无完美匹配

由定理 4.1.1 的证明可知，任何图 G 均满足 $\alpha'(G)\leqslant\beta(G)$.一般说来，这个不等式中等号并不一定成立，例如对长为 $2n+1$ 的圈 C_{2n+1}，有 $\alpha'(C_{2n+1})=n$，$\beta(C_{2n+1})=n+1$.但是对任何不含奇圈的图 G，确实有 $\alpha'(G)=\beta(G)$.这就是下面的 König 定理.

定理 4.3.3(König, 1931)　二部图 G 的最大匹配的边数等于最小覆盖的顶点数，即 $\alpha'(G)=\beta(G)$.

证明 设二部图 $G=(X,Y,E)$,M^* 是 G 的最大匹配,U 是 X 中 M^* 非饱和顶点的集合.若 $U=\emptyset$,则 $|M^*|=|X|$.注意到 X 是 G 的一个覆盖,由定理 4.1.1 知,X 是最小覆盖,从而定理成立.若 $U\neq\emptyset$,用 Z 表示 G 中与 U 中顶点有 M^* 交错链相连的顶点的集合,则 $U\subseteq Z$.令 $S=X\cap Z$,$T=Y\cap Z$,与 Hall 定理的证明中有关论证相似,可得

$$T=N(S),\quad |S\setminus U|=|T|.$$

因为 $T=N(S)$,即 G 中不存在一端点属于 S 而另一端点属于 $Y\setminus T$ 的边,亦即 G 中任意一条边至少有一个端点属于 T 或 $X\setminus S$,所以 $T\cup(X\setminus S)$ 是 G 的一个覆盖,记为 $\widetilde{K}$.显然有

$$|M^*|=|X\setminus U|=|S\setminus U|+|X\setminus S|,$$

从而有

$$|M^*|=|T|+|X\setminus S|=|\widetilde{K}|,$$

由定理 4.1.1,$\widetilde{K}$ 是 G 的最小覆盖,从而定理成立. □

推论 4.3.4 设 G 是无孤立点的二部图,则 G 的独立数等于边覆盖数,即 $\alpha(G)=\beta'(G)$.

证明 由定理 4.3.3 知 $\alpha'(G)=\beta(G)$,而由定理 4.1.3 和定理 4.1.4 知 $\alpha(G)+\beta(G)=\alpha'(G)+\beta'(G)$,从而 $\alpha(G)=\beta'(G)$. □

推论 4.3.5 设 A 为 $m\times n$ 的矩阵,A 的一行或一列称为一条线,则 A 中两两不属于同一条线的 0 的个数的最大值等于包含 A 的所有的 0 的线数的最小值.

证明 我们构造二部图 $G=(X,Y,E)$ 如下:$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$,$Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$,当且仅当 A 的第 i 行第 j 列元素为 0 时,$x_iy_j\in E$.显然,A 中两两不属于同一条线的 0 的集合对应于 G 中的匹配,而包含 A 中全部 0 的线的集合对应于 G 中覆盖.由 König 定理知推论成立. □

推论 4.3.5 其实是 König 定理的一个等价形式,换句话说,由推论 4.3.5 也可以推出 König 定理.

推论 4.3.6 设二部图 $G=(X,Y,E)$,$k\geqslant 1$.$n=\max\{|X|,|Y|\}$,且 $\varepsilon>(k-1)n$,则 $\alpha'(G)\geqslant k$.

证明 因为 G 是二部图,且 $n=\max\{|X|,|Y|\}$,故 $\Delta(G)\leqslant n$,即 G 中每个顶点至多覆盖 n 条边.设 $\tilde{K}$ 为 G 的一个最小覆盖,则 $\tilde{K}$ 至多覆盖 $|\tilde{K}|\cdot n$ 条不同的边,于是 $|\tilde{K}|\cdot n\geqslant\varepsilon>(k-1)n$,从而有 $|\tilde{K}|>k-1$,即 $\beta(G)\geqslant k$.再由 König 定理立即得到 $\alpha'(G)\geqslant k$. □

下面我们根据 Berge 定理和 König 定理给出求二部图 $G=(X,Y,E)$ 中最大

匹配的一个算法，这个算法通常称为匈牙利算法，因为这里介绍的寻找增广链的标号法是由匈牙利学者 Egerváry 最早提出来的．它的基本思想是：对于已知的匹配 M，从 X 中的任一选定的 M 非饱和点出发，用标号的方法寻找 M 增广链，如果找到 M 增广链，则 M 就可以得到增广；否则，从 X 中另一个 M 非饱和点出发，继续寻找 M 增广链．重复这个过程直到 G 中不存在增广链时结束．由 Berge 定理，此时的匹配就是 G 的最大匹配．匈牙利算法的具体步骤如下．

Step0　在二部图 $G=(X,Y,E)$ 中任取一个匹配 M（可取 $M=\varnothing$），所有顶点都没有标号．

Step1　（标号）

1.1　如果 X 中没有 M 非饱和点，则 M 为最大匹配，结束；否则，把 X 中每个 M 非饱和点给予标号"-1"和"未检查"．

1.2　如果 X 中所有标号的顶点都已检查，转 Step3；否则，取 X 中已标号未检查的顶点 x_i．

1.3　若所有与 x_i 相邻的顶点都已标号，则把 x_i 改为已检查，转 1.2；否则，转 1.4．

1.4　把所有与 x_i 相邻的未标号顶点 y_j 都给予标号"i"．若其中某个 y_j 是 M 非饱和点，转 Step2；否则对所有 y_j，把与 y_j 在 M 中配对的顶点 x_p 给予标号"j"和未检查，并把 x_i 改为已检查，转 1.2．

Step2　（增广）从得到标号的 Y 中，M 非饱和点 y_j 开始反向追踪，一直找到标号为"-1"的 X 中 M 非饱和点 x_i 为止，得到 G 中 M 增广链 P，令 $M:=M\oplus E(P)$，取消 G 中所有顶点的标号，转 Step1．

Step3　M 是 G 的最大匹配，结束．

例 4.3.1　求图 4.3.2 中二部图的最大匹配．

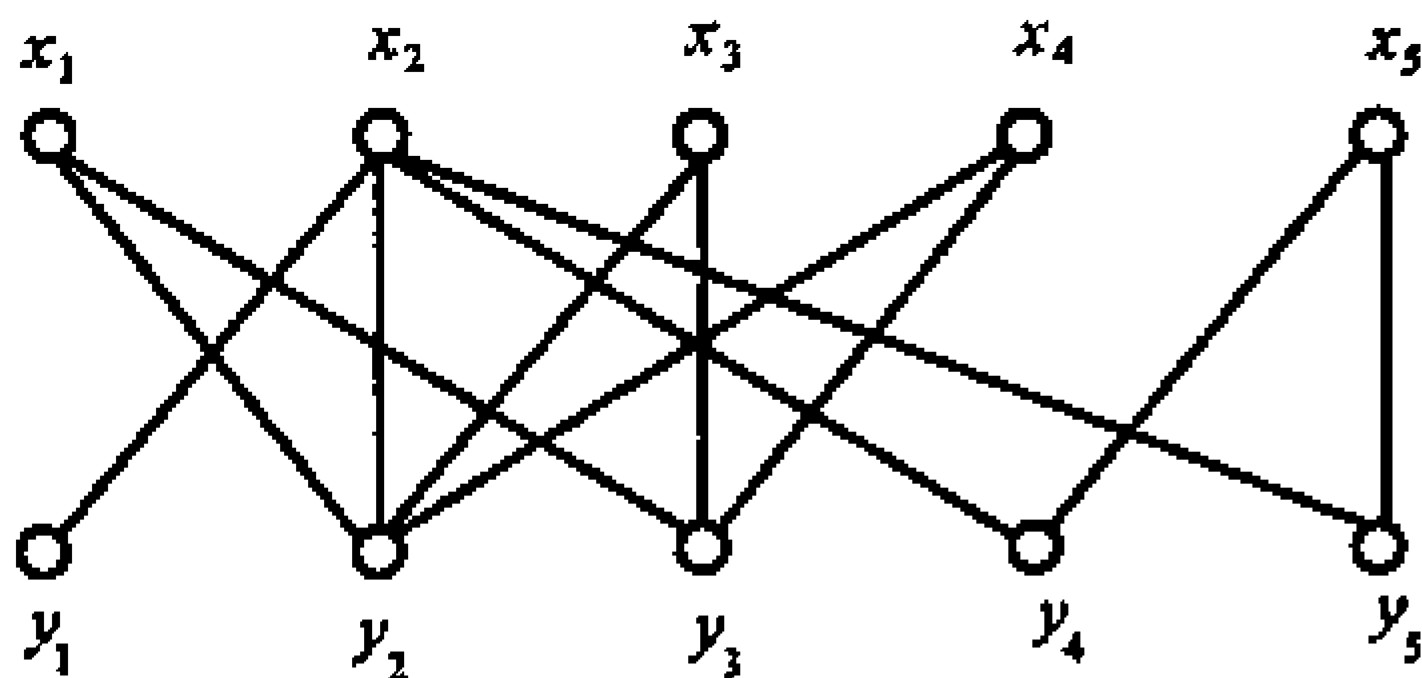


图 4.3.2　求二部图的最大匹配

解　选取初始匹配 $M=\{x_2y_2,x_3y_3,x_5y_5\}$，应用匈牙利算法的迭代过程如图 4.3.3 所示（其中粗边表示匹配的边）．　□

下面我们来证明匈牙利算法的正确性，为此只须证明算法在 Step3 结束时 M

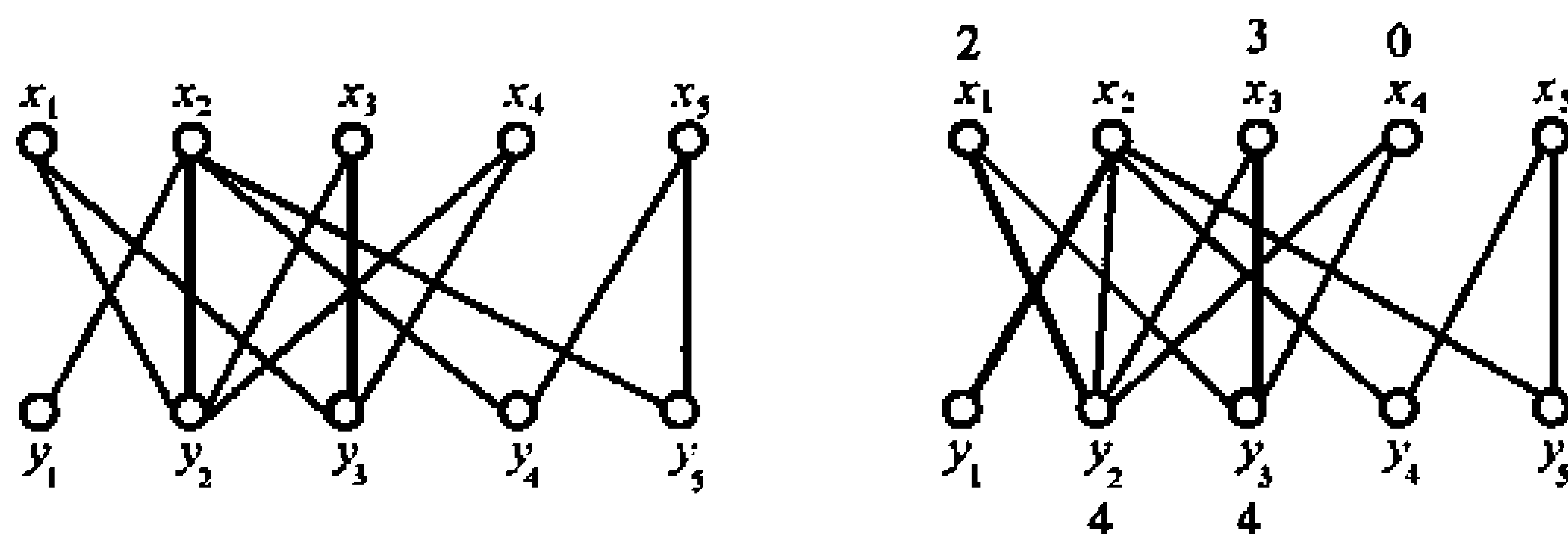


图 4.3.3 二部图最大匹配的求解过程

是最大匹配.根据算法的步骤,当算法在Step3结束时,X中所有标号顶点都已检查,但没有找到M增广链.令S是X中所有标号顶点的集合,T是Y中所有标号顶点的集合,则$N(S) = T$.把X中的所有M非饱和点的集合记为U,则$S \setminus U$和T中顶点都是M饱和点,由算法知,$S \setminus U$中顶点与T中顶点在M中两两配对,即$|S \setminus U| = |T|$.记$L = (X \setminus S) \cup T$,由König定理知,$|M| = |L|$,因此,$M$为$G$的最大匹配.

4.4 相异代表系

在4.3节中,我们介绍了指派问题.若指派问题无解,即不存在一种安排使得每名员工都做他胜任的工作,那么我们想知道最多可以有多少位员工被安排做他所胜任的工作.若指派问题有解,则我们希望知道有多少种不同的分工方案.

设m名员工的集合为$X = \{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$,$n$项工作的集合为$Y = \{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$.设$\mathscr{A} = \{A_1, A_2, \cdots, A_m\}$是集合$Y$的$m$个子集构成的子集族,每个$A_i$代表员工$x_i$所能胜任的工作集合.若$Y$中存在$m$元子集$T = \{t_1, t_2, \cdots, t_m\}$满足$t_1 \in A_1, t_2 \in A_2, \cdots, t_m \in A_m$,则称$T$为集族$\mathscr{A} = \{A_1, A_2, \cdots, A_m\}$的一个代表系(representatives).如果T中的元素两两互不相同,则称代表系T为集族$\mathscr{A}$的相异代表系(system of distinct representatives).这种称呼的直观意义是明显的,那就是$t_i \in A_i$表示t_i是A_i的代表,而t_i与$t_j (i \neq j)$互不相同表示A_i与A_j具有不同的代表.显然,若所有的A_i非空,则$\mathscr{A}$有代表系,但却不一定有相异代表系.一个自然的问题是:怎样的$\mathscr{A}$具有相异代表系?

为了研究怎样的$\mathscr{A} = \{A_1, A_2, \cdots, A_m\}$才具有相异代表系,我们构造相应的二部图$G = (X, Y, E)$:$X = \{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$,$Y = \{y_1, y_2, \cdots, y_n\} \supseteq \bigcup_{i=1}^{m} A_i$;边集$E$中含有边$x_iy_j$,当且仅当$y_j \in A_i$.于是$\mathscr{A}$有相异代表系等价于$G$中含有饱和$X$

中每个顶点的匹配.由 Hall 定理,可以得到一个集族有相异代表系的充要条件.

定理 4.4.1　集族 $\mathscr{A}$ 有相异代表系,当且仅当 $\forall I \subseteq \{1,2,\cdots,m\}$,有

$$|\bigcup_{i\in I} A_i| \geqslant |I|.$$ □

当某集族没有相异代表系时,我们希望确定集族中有相异代表系的集合的最大数目.首先,我们证明下面的定理.

定理 4.4.2　设 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 是集合 S 的 m 个子集,r 是正整数 $r \leqslant m$,则集合族 $\mathscr{A}=\{A_1,A_2,\cdots,A_m\}$ 中存在 r 个集合有相异代表系,当且仅当 $\forall I \subseteq \{1,2,\cdots,m\}$,有

$$|\bigcup_{i\in I} A_i| \geqslant |I| - (m-r).$$

证明　令 F 是由 $m-r$ 个元素构成的集合,并且与 S 没有公共元素,于是 F 与每个 A_i 也没有公共元素.考虑集族 $A_1 \cup F, A_2 \cup F, \cdots, A_m \cup F$.

首先证明集族 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 中的 r 个集合有相异代表系,当且仅当 $A_1 \cup F$, $A_2 \cup F,\cdots,A_m \cup F$ 有相异代表系.

一方面,当集族 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 中存在 r 个集合有相异代表系时,不妨设这 r 个集合为 $A_1,A_2,\cdots,A_r$,它们的代表元分别为 $e_1,e_2,\cdots,e_r$,又设 $F=\{f_1,f_2,\cdots,f_{m-r}\}$,则 $T=\{e_1,e_2,\cdots,e_r,f_1,f_2,\cdots,f_{m-r}\}$ 就是 $A_1 \cup F, A_2 \cup F,\cdots,A_m \cup F$ 的一个相异代表系.

另一方面,设 $A_1 \cup F, A_2 \cup F,\cdots,A_m \cup F$ 有相异代表系 $T=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$.因为 F 只有 $m-r$ 个元素,所以 T 中至多有 $m-r$ 个元素属于 F,即 T 中至少有 r 个元素属于 S.不妨设 $x_1,x_2,\cdots,x_r$ 这 r 个元素都属于 S,这样,相应的 A_1, $A_2,\cdots,A_r$ 就有相异代表系.

由定理 4.4.1 知,集族 $A_1 \cup F, A_2 \cup F,\cdots,A_m \cup F$ 有相异代表系,当且仅当 $\forall I \subseteq \{1,2,\cdots,m\}$,有

$$|\bigcup_{i\in I}(A_i \cup F)| \geqslant |I|. \tag{4.4.1}$$

而 $A_i \cap F = \varnothing(\forall i = 1,2,\cdots,m)$,故

$$|\bigcup_{i\in I}(A_i \cup F)| = |\bigcup_{i\in I} A_i| + |F| = |\bigcup_{i\in I} A_i| + (m-r),$$

于是式(4.4.1)即为

$$|\bigcup_{i\in I} A_i| \geqslant -(m-r) + |I|. \tag{4.4.2}$$

这说明式(4.4.2)成立等价于 $A_1 \cup F, A_2 \cup F,\cdots,A_m \cup F$ 有相异代表系.而 $A_1 \cup F, A_2 \cup F,\cdots,A_m \cup F$ 有相异代表系,当且仅当 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 中有 r 个集合有相异代表系. □

由定理 4.4.2 知,集族 $\mathscr{A}$ 中有 r 个集合有相异代表系,当且仅当对每个 $I \subseteq$

$\{1,2,\cdots,m\}$,有

$$\left|\bigcup_{i\in I}A_i\right| \geqslant r-(m-|I|),$$

即 $\left|\bigcup_{i\in I}A_i\right|+(m-|I|)\geqslant r$,于是 r 的最大值 r_0 即为 $\left|\bigcup_{i\in I}A_i\right|+(m-|I|)$ 的最小值,即

$$r_0=\min\left\{\left|\bigcup_{i\in I}A_i\right|+(m-|I|)\,\middle|\,I\subseteq\{1,2,\cdots,m\}\right\}.$$

综上得到:

定理4.4.3 设集族 $\mathscr{A}=\{A_1,A_2,\cdots,A_m\}$,则 $\mathscr{A}$ 中有相异代表系的集合的最大数目 r_0 为

$$r_0=\min\left\{\left|\bigcup_{i\in I}A_i\right|+(m-|I|)\,\middle|\,I\subseteq\{1,2,\cdots,m\}\right\}.$$ □

例4.4.1 现有6名员工 $x_1,x_2,\cdots,x_6$ 和6项工作 $y_1,y_2,\cdots,y_6$,设 A_i 为员工 x_i 适合做的工作的集合,其中

$$A_1=\{y_1,y_2\},A_2=\{y_1,y_3,y_4,y_5\},$$
$$A_3=\{y_2,y_6\},A_4=\{y_1,y_2,y_6\},$$
$$A_5=\{y_1,y_6\},A_6=\{y_3,y_4,y_5\}.$$

问:是否有一种工作分配方案使每个员工都做他适合的工作?如果这种方案不存在,那么最多可以使多少人做他们适合的工作?

解 作二部图 $G=(X,Y,E)$ 如图4.4.1所示.注意到对 $I=\{1,3,4,5\}$,有 $\left|\bigcup_{i\in I}A_i\right|=|A_1\cup A_3\cup A_4\cup A_5|=|\{1,2,6\}|=3$,而且 $|I|=4$,由定理4.4.1知,使每个员工都做自己合适的工作的分配方案是不存在的.

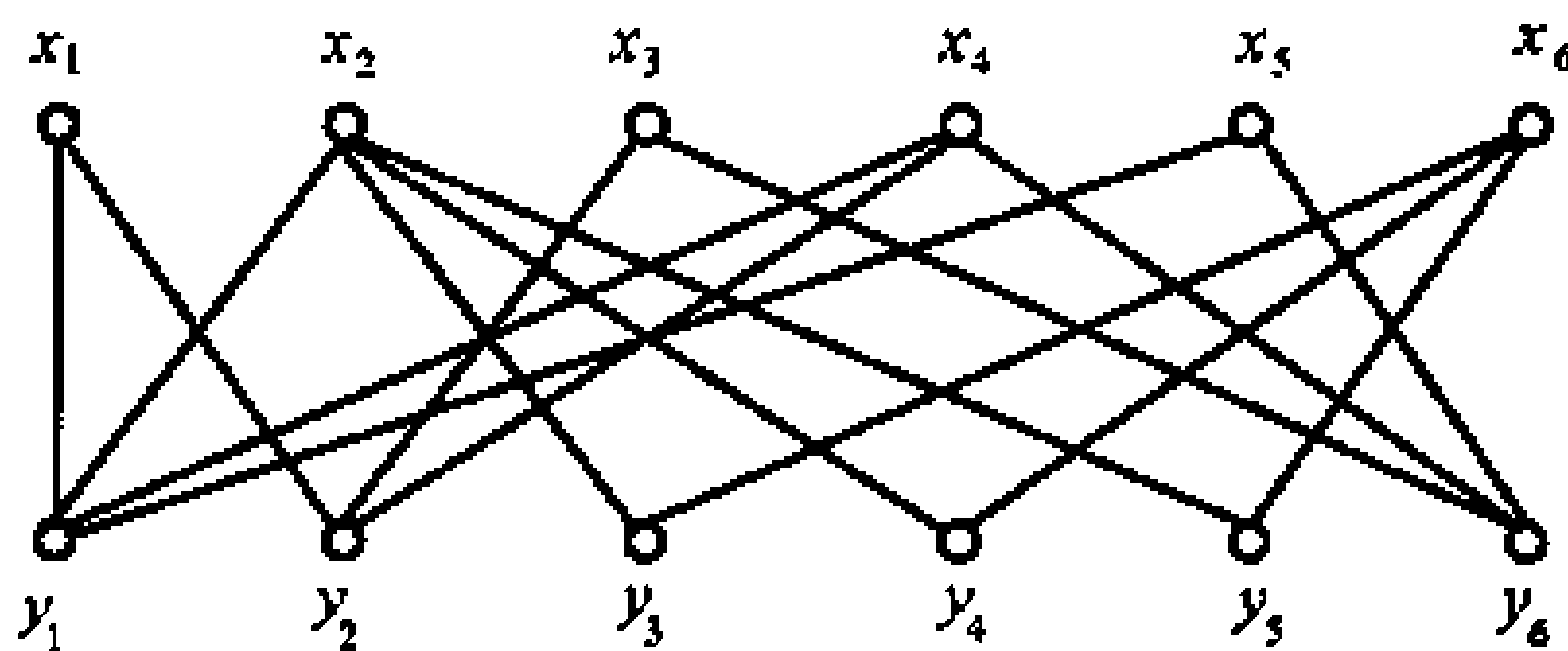


图4.4.1 例4.4.1中指派问题对应的二部图

下面考察最多可以使多少个员工做自己合适的工作.由定理4.4.3知

$$\min\left\{\left|\bigcup_{i\in I}A_i\right|+(6-|I|)\,\middle|\,I\subseteq\{1,2,\cdots,6\}\right\}=r_0.$$

易知

$$\min\left\{\left|\bigcup_{i\in I}A_i\right|+(6-6)\,\middle|\,|I|=6,I\subseteq\{1,2,\cdots,6\}\right\}=6,$$
$$\min\left\{\left|\bigcup_{i\in I}A_i\right|+1\,\middle|\,|I|=5,I\subseteq\{1,2,\cdots,6\}\right\}=7,$$

$$\min\{|\bigcup_{i\in I}A_i|+2 \mid |I|=4, I\subseteq\{1,2,\cdots,6\}\}=5,$$
$$\min\{|\bigcup_{i\in I}A_i|+3 \mid |I|=3, I\subseteq\{1,2,\cdots,6\}\}=6,$$
$$\min\{|\bigcup_{i\in I}A_i|+4 \mid |I|=2, I\subseteq\{1,2,\cdots,6\}\}=7,$$
$$\min\{|\bigcup_{i\in I}A_i|+5 \mid |I|=1, I\subseteq\{1,2,\cdots,6\}\}=7.$$

综上,我们得到:

$$r_0=\min\{|\bigcup_{i\in I}A_i|+(n-|I|) \mid I\subseteq\{1,2,\cdots,6\}\}$$
$$=\min\{6,7,5,6,7,7\}=5,$$

即最多可以使 5 个人做自己适合的工作.但我们仍然不知道究竟是哪 5 位员工,以及如何安排他们的工作.我们可以利用 4.3 节中给出的匈牙利算法具体求出.例如可按如下方式安排工作:x_1 做工作 y_1, x_2 做工作 y_3, x_3 做工作 y_2, x_4 做工作 y_6, x_6 做工作 y_4. □

接下来,我们讨论相异代表系的计数问题.当集族 $\mathscr{A}=\{A_1,A_2,\cdots,A_m\}$ 有相异代表系时,我们希望进一步知道集族 $\mathscr{A}$ 有多少个不同的相异代表系.这是一个很复杂的计数问题,这里,我们只给出它的一个下界.

定理4.4.4　设集族 $\mathscr{A}=\{A_1,A_2,\cdots,A_m\}$ 有相异代表系,且每个子集 A_i 至少包含 t 个元素,则有

(1) 若 $t\leqslant m$,则 $\mathscr{A}$ 至少有 $t!$ 个不同的相异代表系;

(2) 若 $t>m$,则 $\mathscr{A}$ 至少有 $\dfrac{t!}{(t-m)!}$ 个不同的相异代表系.

证明

(1) 用归纳法.对于 $m=1$,则 $t=1$, $\mathscr{A}$ 有惟一一个相异代表系,结论成立.现在我们假设结论对于每一个 $m'<m$ 是成立的,我们要证明它对 $\mathscr{A}=\{A_1,A_2,\cdots,A_m\}$ 也成立.分两种情形讨论.

(i) $\forall I\subseteq\{1,2,\cdots,m\}$,且 $|I|<m$,有 $|\bigcup_{i\in I}A_i|\geqslant|I|+1$.

任取 A_1 中一个元素 a_1,在集族 $\mathscr{A}$ 的其他集合中只要出现 a_1 就去掉它.如此得到 $A_2'=A_2\setminus\{a_1\}, A_3'=A_3\setminus\{a_1\},\cdots,A_m'=A_m\setminus\{a_1\}$.记集族 $\mathscr{A}'=\{A_2',A_3',\cdots,A_m'\}$.由于 $\forall I\subseteq\{2,3,\cdots,m\}$(此时显然有 $|I|<m$)有 $|\bigcup_{i\in I}A_i|\geqslant|I|+1$,从而 $|\bigcup_{i\in I}A_i'|\geqslant|\bigcup_{i\in I}A_i|-1\geqslant|I|$.由定理 4.4.1 知 $\mathscr{A}'$ 有相异代表系.由归纳假设 $\mathscr{A}'$ 至少有 $(t-1)!$ 个不同的相异代表系.再由 a_1 的任意性知 $\mathscr{A}$ 至少有 $t!$ 个不同的相异代表系.

(ii) 存在集合 $\{1,2,\cdots,m\}$ 的某个子集 $\{i_1,i_2,\cdots,i_k\}$ 使 $\left|\bigcup_{l=1}^{k}A_{i_l}\right|=k$ 且 $k<$

m.不妨设 $i_1=1, i_2=2, \cdots, i_k=k$,即$\left|\bigcup_{l=1}^{k} A_l\right|=k$.

在这种情况下,有 $t \leqslant |A_1| \leqslant \left|\bigcup_{l=1}^{k} A_l\right|=k$.

由归纳假设,集族$\{A_1, A_2, \cdots, A_k\}$至少有 $t!$ 个不同的相异代表系.设其中的一个代表系为 $T^*=\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$.在集合 $A_{k+1}, A_{k+2}, \cdots, A_m$ 中,凡出现 T^* 中的元素就去掉它,如此得到 $A_{k+1}^*=A_{k+1} \setminus T^*, A_{k+2}^*=A_{k+2} \setminus T^*, \cdots, A_m^*=A_m \setminus T^*$.我们断言集族 $\mathscr{A}^*=\{A_{k+1}^*, A_{k+2}^*, \cdots, A_m^*\}$ 有相异代表系,即 $\mathscr{A}^*$ 满足定理 4.4.1 的充要条件.事实上,由于$\left|\bigcup_{l=1}^{k} A_l\right|=k$ 及$\left|\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \cup\left(\bigcup_{l=1}^{k} A_l\right)\right| \geqslant k+|I|$ $(\forall I \subseteq\{k+1, k+2, \cdots, m\})$ 知

$$
\begin{aligned}
\left|\bigcup_{i \in I} A_i\right| & \geqslant\left|\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \cup\left(\bigcup_{l=1}^{k} A_l\right)\right|-\left|\bigcup_{l=1}^{k} A_l\right| \\
& \geqslant k+|I|-k=|I| .
\end{aligned}
$$

这样,我们就证明了对集族$\{A_1, A_2, \cdots, A_k\}$的任一相异代表系 T^*,相应的集族 $\mathscr{A}^*=\{A_{k+1}^*, A_{k+2}^*, \cdots, A_m^*\}$ 也至少有一个相异代表系,并且这两个相异代表系的并集就构成了集族 $\mathscr{A}$ 的一个相异代表系.由归纳假设$\{A_1, A_2, \cdots, A_k\}$至少有 $t!$ 个不同的相异代表系,因此,$\mathscr{A}$ 也至少有 $t!$ 个不同的相异代表系.

类似地,可以证明(2). □

通过把相异代表系的有关理论应用于拉丁方,我们将证明任意 n 阶拉丁方都是存在的,并且得到 n 阶拉丁方个数的一个下界.

一个 $m \times n$ 拉丁矩(latin rectangle)是指一个 $m \times n$ 矩阵$M=(m_{ij})$,其元素 m_{ij} 为满足 $1 \leqslant m_{ij} \leqslant n$ 的整数,且属于同一行或同一列的任意两个元素不相等.由定义知 $m \leqslant n$.当 $m=n$ 时,称 $n \times n$ 拉丁矩为 n 阶拉丁方(latin square).

定理 4.4.5 对任一个 $m \times n$ 拉丁矩 $M=(m_{ij})$,可增加 $n-m$ 个新的行使 M 扩充为一个拉丁方.

证明 设 $A_i \subseteq\{1,2, \cdots, n\}$,它由不包含在拉丁矩 $M=(m_{ij})$ 第 i 列中的元素组成,$i=1,2, \cdots, n$.显然每个 A_i 中包含了 $n-m$ 个元素.令集族 $\mathscr{A}=\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$.我们来证明 $\mathscr{A}$ 满足定理 4.4.1 的充要条件,即 $\mathscr{A}$ 有相异代表系.

$\forall i \in\{1,2, \cdots, n\}$,由于 i 在 M 的每一行中仅出现一次,且每列中的两个元素互不相同,可见 i 在 m 个不同列中出现 m 次,根据集合 A_i 的定义,元素 i 恰好包含在 $\mathscr{A}$ 的 $n-m$ 个子集中.

假若 $\mathscr{A}$ 不满足相异代表系存在的条件,即存在 k 个数 $1 \leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k \leqslant n$,使$\left|\bigcup_{j=1}^{k} A_{i_j}\right|=l \leqslant k-1$,但是 $\bigcup_{j=1}^{k} A_{i_j}$ 的 l 个元素的每一个在这个并集中最

多只可能出现 $n-m$ 次,因此

$$\sum_{j=1}^{k}|A_{i_j}|\leqslant l(n-m)\leqslant(k-1)(n-m).$$

另一方面,因为每个集合 A_i 包含 $n-m$ 个元素,故有

$$\sum_{j=1}^{k}|A_{i_j}|=k(n-m).$$

矛盾.

综上,我们证明了集族 $\mathscr{A}$ 有相异代表系.设 $\{i_1,i_2,\cdots,i_n\}$ 为 $\mathscr{A}$ 的一个相异代表系,因为数 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 两两不同,所以它恰好是自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列.通过把 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 这一行加到 $m\times n$ 拉丁矩中,我们就得到了一个 $(m+1)\times n$ 拉丁矩.这个过程可以继续进行,直到得到一个 n 阶拉丁方为止. □

自然数 $1,2,\cdots,n$ 的任一排列都可以看成是 $1\times n$ 拉丁矩,利用定理 4.4.5,我们可以把 $1\times n$ 拉丁矩扩充为一个 n 阶拉丁方.因此,任意 n 阶拉丁方都是存在的,当然任意 $m\times n$ 拉丁矩($m<n$)也是存在的.下面的推论给出了 $m\times n$ 拉丁矩个数的一个下界.

推论 4.4.6　由自然数 $1,2,\cdots,n$ 组成的 $m\times n$ 拉丁矩($m\leqslant n$)至少有 $n!(n-1)!\cdots(n-m+1)!$ 个.

证明　因为自然数 $1,2,\cdots,n$ 的排列共有 $n!$ 个,所以由 $1,2,\cdots,n$ 组成的 $1\times n$ 拉丁矩有 $n!$ 个.由定理 4.4.5 知,每一个 $1\times n$ 拉丁矩都可通过加入新的一行而得到扩充,且这新的一行是 $\mathscr{A}=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$ 的一个相异代表系.由 A_i 的定义易见每个 A_i 都包含了 $n-1$ 个元素.由 $n-1<n$ 及定理 4.4.4 知 $\mathscr{A}$ 至少有 $(n-1)!$ 个不同的相异代表系.因此,每个 $1\times n$ 拉丁矩至少可以生成 $(n-1)!$ 个 $2\times n$ 拉丁矩.继续这个过程,直到得到 m 行为止.这样,我们至少得到 $n!(n-1)!\cdots(n-m+1)!$ 个 $m\times n$ 拉丁矩. □

值得一提的是,这不是个令人满意的下界.对于 n 阶拉丁方,$n>3$ 时,误差就很大了.Yamamoto(1951) 证明了当 $m<\sqrt[3]{n}$ 时,$m\times n$ 拉丁矩的渐近值为 $(n!)^m e^{-\binom{m}{2}}$.

4.5　完美匹配

本节讨论一个图存在完美匹配的充要条件,为方便起见,我们称有奇(偶)数个顶点的连通分支为奇(偶)分支,并用 $o(G)$ 表示图 G 的奇分支的个数.

定理 4.5.1(Tutte,1947)　图 G 有完美匹配,当且仅当

$$o(G-S)\leqslant |S|, \forall S\subset V(G). \tag{4.5.1}$$

证明

($\Rightarrow$) 设 G 有完美匹配 M, $S\subset V(G)$, $G_1, G_2, \cdots, G_n$ 是 $G-S$ 的所有奇分支. 因为 G_i 是奇分支, 且 G_i 的每个顶点都是 M 饱和点, 所以 G_i 中必有一个顶点 u_i 与一个属于 S 的顶点 v_i 在 M 中配对, $i=1,2,\cdots,k$. 而 M 中的边互不相邻, 即顶点 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 互不相同, 因此有 $o(G-S)\leqslant |S|$.

($\Leftarrow$) 设 G 满足式(4.5.1), 对 $\nu(G)$ 用归纳法证明 G 有完美匹配. 首先注意到, 取 $S=\emptyset$ 时有 $o(G)=0$, 即 $\nu(G)$ 为偶数. 显然, 当 $\nu(G)=2$ 时, 由式(4.5.1)可推出 G 有完美匹配. 现在假设 $\nu(G)=n\geqslant 2$, 并假设一切阶小于 n 且满足式(4.5.1)的图均有完美的匹配.

首先证明: 存在非空 $S\subset V(G)$ 使式(4.5.1)中等号成立. 事实上. $\forall v\in V(G)$, 取 $S=\{v\}$, 于是 $G-S$ 是奇阶的, 因而 $o(G-S)\geqslant 1=|S|$, 故由式(4.5.1)知 $o(G-S)=|S|$.

其次, 设 S_0 是使式(4.5.1)中等号成立的顶点数最多的 S. 设 $G_1, G_2, \cdots, G_l$ 是 $G-S_0$ 的所有奇分支, $1\leqslant l=|S_0|$. 而且当 $G-S_0$ 存在偶分支时, 设 $H_1, H_2, \cdots, H_m$ 是 $G-S_0$ 的全部偶分支.

(1) $\forall 1\leqslant j\leqslant m$, H_j 有完美匹配. 这是因为 $\forall S\subset V(H_j)$, 有

$$\begin{aligned} o(G-S_0)+o(H_j-S) &= o(G-(S_0\cup S)) \\ &\leqslant |S_0\cup S| = |S_0|+|S|. \end{aligned}$$

故由 $o(G-S_0)=|S_0|$ 知 $o(H_j-S)\leqslant |S|$. 由归纳假设, H_j 有完美匹配.

(2) $\forall 1\leqslant i\leqslant l$ 和 $v\in V(G_i)$, G_i-v 有完美匹配. 假若不然, 由归纳假设知, 必有 $S\subset V(G_i-v)$, 使

$$o(G_i-v-S)>|S|. \tag{4.5.2}$$

因为 $|V(G_i-v)|$ 为偶数, 所以 $|V(G_i-v-S)|$ 与 $|S|$ 有相同的奇偶性, 而 $o(G_i-v-S)$ 与 $|V(G_i-v-S)|$ 也具有相同的奇偶性, 由式(4.5.2)知 $o(G_i-v-S)\geqslant |S|+2$, 于是有

$$\begin{aligned} |S_0|+1+|S| &= |S_0\cup\{v\}\cup S| \\ &\geqslant o(G-(S_0\cup\{v\}\cup S)) \\ &= o(G-S_0)-1+o(G_i-v-S) \\ &\geqslant |S_0|+|S|+1. \end{aligned}$$

这表明集合 $S_0\cup\{v\}\cup S$ 也使(4.5.1)式中等号成立, 此与 S_0 的最大性矛盾.

(3) G 中包含 l 条形如 u_iv_i 的互不相邻的边, 其中 $u_i\in S_0$, $v_i\in V(G_i)$, $i=$

$1,2,\cdots,l$. 为了证明这个断言，我们构造一个二部图 $H=(X,Y,E)$：$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_l\}$，$Y=S_0$，并且 $\forall x_i\in X$，$u\in S_0$，当且仅当 G 中有一条连接 u 与 G_i 中某顶点的边时，$x_iu\in E$. 于是，上述断言等价于 H 中存在饱和 X 中所有顶点的匹配，而对后者可以应用 Hall 定理. $\forall S\subseteq X$，令 $S'=N_H(S)$，根据 H 与 G 的关系，S 对应的那些 G_j 必定是 $G-S'$ 的奇分支，故

$$|S|\leqslant o(G-S'). \tag{4.5.3}$$

又由条件式(4.5.1)知

$$o(G-S')\leqslant|S'|=|N_H(S)|, \tag{4.5.4}$$

综合式(4.5.3)和式(4.5.4)，$|S|\leqslant|N_H(S)|$，因此图 H 满足 Hall 定理的条件，从而 H 中存在饱和 X 的所有顶点的匹配.

如图 4.5.1，由(1)，(2)和(3)知 G 有完美匹配. 这是因为，设 M_1 是(3)中形如 u_iv_i 的 l 条互不相邻的边的集合，其中 $u_i\in S_0$，$v_i\in V(G_i)(1\leqslant i\leqslant l)$. 由(2)知，$G_i-v_i$ 有完美匹配 $M_{2i}(1\leqslant i\leqslant l)$，记 $M_2=\bigcup\limits_{i=1}^{l}M_{2i}$. 由(1)知，$H_j$ 有完美匹配 $M_{3j}(1\leqslant j\leqslant m)$，记 $M_3=\bigcup\limits_{j=1}^{m}M_{3j}$. 显然 $M=M_1\cup M_2\cup M_3$ 是 G 的完美匹配. □

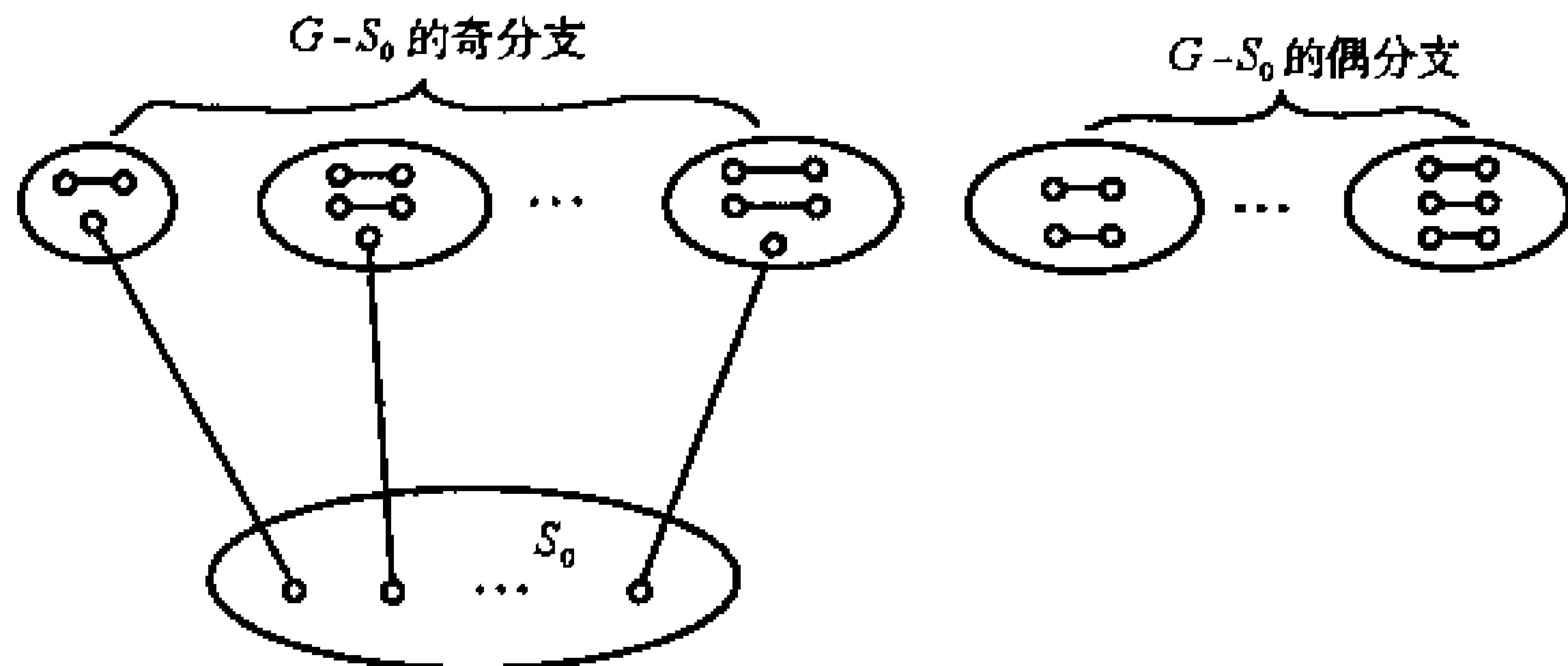


图 4.5.1　图 G 的完美匹配

推论 4.5.2　每个 $k-1$ 边连通的偶阶 k 正则图 G 都有完美匹配.

证明　当 $k=1$ 时，推论显然成立. 下设 $k\geqslant 2$. 令 $S\subset V(G)$. 当 $S=\varnothing$ 时，因 G 连通，且 $\nu(G)$ 为偶数，故有 $o(G-S)=o(G)=0=|S|$. 当 $S\neq\varnothing$ 时，设 $G_1,G_2,\cdots,G_n$ 是 $G-S$ 的所有奇分支，即 $o(G-S)=n$，并假定 G_i 与 S 之间恰有 m_i 条边 $(1\leqslant i\leqslant m)$. 因为 G 是 $k-1$ 边连通的，所以 $m_i\geqslant k-1$. 另一方面，由于 G 是 k 正则的，因此，$\forall 1\leqslant i\leqslant n$，有

$$m_i = \sum_{v \in V(G_i)} d_G(v) - 2\varepsilon(G_i) = k \cdot \nu(G_i) - 2\varepsilon(G_i).$$

因为 $\nu(G_i)$ 是奇数，$2\varepsilon(G_i)$ 是偶数，所以 m_i 与 k 有相同的奇偶性，从而由 $m_i \geqslant k-1 (1 \leqslant i \leqslant n)$ 知 $m_i \geqslant k (1 \leqslant i \leqslant n)$，而 $\sum_{v \in S} d_G(v) \geqslant \sum_{i=1}^{n} m_i$，于是有

$$|S| = \frac{1}{k}\sum_{v \in S} d_G(v) \geqslant \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n} m_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{k} \geqslant n = o(G-S),$$

由 Tutte 定理知 G 有完美匹配. □

习 题 四

1. 设 $\bar{K}_n, K_n, K_{m,n}, C_n, P_n$ 分别表示 n 阶空图，n 阶完全图，$m+n$ 阶完全二部图，长为 n 的圈和链，求出它们的独立数 α、边独立数 α'、覆盖数 β 和边覆盖数 β'.

2. 证明：

(1) 对于任何图 G，都有 $\beta(G) \geqslant \alpha'(G)$.

(2) 对于任何无孤立点的图 G，都有

$$\alpha'(G) \leqslant \lfloor \frac{\nu}{2} \rfloor \leqslant \lfloor \frac{\nu+1}{2} \rfloor \leqslant \beta'(G).$$

(3) 对于任何简单图 G，有 $\beta(G) \geqslant \delta(G)$，且当 G 或为空图，或为完全图，或为完全二部图时，有 $\beta(G) = \delta(G)$.

3. 设 G 为连通图，证明：$\dfrac{\kappa(G)}{\alpha(G)} \leqslant t(G) \leqslant \dfrac{\nu(G) - \alpha(G)}{\alpha(G)}$.

4. 证明：

(1) G 是二部图的充要条件是存在 $V^* \subset V(G)$，使得 V^* 既是 G 的独立集，又是 G 的覆盖；

(2) G 是二部图的充要条件是对 G 的每个子图 H，均有 $\alpha(H) \geqslant \frac{1}{2}\nu(H)$；

(3) G 是二部图的充要条件为对每个使得 $\delta(H) > 0$ 的子图 H，都有 $\alpha(H) = \beta'(H)$.

5. 证明：对于无孤立点的图 G 的任一最大边独立集 L，总可以再添加 G 中的一些边，使之成立 G 的最小边覆盖.

6. 设二部图 $G = (X, Y, E)$，证明 G 中最大匹配所含的边数为

$$|X|-\max_{S\subseteq X}\{|S|-|N(S)|\}.$$

7. 设G为二部图,其顶点集的二划分为X,Y,证明:若G中有饱和X的每一顶点的匹配,则存在$x\in X$,使得对于任何$y\in N(x)$,边xy属于G中的某一个最大匹配.

8. 设$\boldsymbol{A}$为$m\times n$的$0-1$矩阵,$m\leqslant n$,且矩阵$\boldsymbol{A}$的每一行中都有k个1,而每一列中1的个数不超过k,则$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}_1+\boldsymbol{P}_2+\cdots+\boldsymbol{P}_k$,其中$\boldsymbol{P}_i$也是$m\times n$的$0-1$矩阵,每行恰有1个1,每列中1的个数不超过1.

9. 设$\boldsymbol{M}_1=(a_{ij}),\boldsymbol{M}_2=(b_{ij})$为两个$n$阶拉丁方,令$\boldsymbol{M}=((a_{ij},b_{ij}))$.若$\boldsymbol{M}$中任何两个有序数对都不相同,则称$\boldsymbol{M}_1$和$\boldsymbol{M}_2$是相互正交的拉丁方.例如$\boldsymbol{M}_1=\begin{bmatrix}1&2&3\\3&1&2\\2&3&1\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{M}_2=\begin{bmatrix}3&2&1\\2&1&3\\1&3&2\end{bmatrix}$,则$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}(1,3)&(2,2)&(3,1)\\(3,2)&(1,1)&(2,3)\\(2,1)&(3,3)&(1,2)\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{M}_1$和$\boldsymbol{M}_2$是正交的.

(1) 证明最多有$n-1$个两两正交的n阶拉丁方;

(2) 设$\boldsymbol{M}_1,\boldsymbol{M}_2,\cdots,\boldsymbol{M}_k$是两两正交的$n$阶拉丁方,$\boldsymbol{L}_1,\boldsymbol{L}_2,\cdots,\boldsymbol{L}_k$是两两正交的$m$阶拉丁方,证明至少有$k$个两两正交的$mn$阶拉丁方.

10. 设有集族$\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$,对任意非空集合$J\subseteq\{1,2,\cdots,n\}$,定义$A_J=\bigcup_{j\in J}A_j$,若$\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$满足:$\forall J\subseteq\{1,2,\cdots,n\}$,有$|A_J|\geqslant|J|+1$,则$\forall x\in A_1$,集族$\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$均有一相异代表系,在该代表系中,$A_1$的代表元为$x$.

11. 证明:集族$\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$的2^{n-1}个Hall条件$|A_J|\geqslant|J|$ $(J\neq\varnothing)$是相互独立的,即对任一非空集合$J_0\subseteq\{1,2,\cdots,n\}$,存在一个子集族$\{A_1',A_2',\cdots,A_n'\}$满足

(1) $|A_{J_0}'|<|J_0|$;

(2) $|A_J'|\geqslant|J|$ (若$J\neq J_0$).

12. 族集$\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$有一代表系,且其中每个代表元出现的次数不超过r次的充要条件是:$\forall J\subseteq\{1,2,\cdots,n\}$,$r|A_J|\geqslant|J|$.

13. 问对于信息组$\{ace,bc,dab,db,be\}$是否可以用每个字中的一个字母来代替该字,从而使信息简化?为什么?

14. a,b,c,d,e,f六个人组成检查团,检查五个单位的工作.若某单位和检查团中的某一成员有过工作联系,则不允许他到该单位去检查.已知第一个单位与b,c,d有过联系,第二个单位与a,e,f有过联系,第三个单位与a,b,e,f有

过联系，第四个单位与 a,b,d,f 有过联系，第五个单位与 a,b,c 有过联系，请列出去各单位检查的人员名单.

15. 证明：树 T 有完美匹配，当且仅当 $\forall v \in V(T)$，有 $o(T-v)=1$.

16.(1) 设 k 为大于1的奇数，举出没有完美匹配的 k 正则简单图的例子.

(2) 设 k 为大于零的偶数，举出有完美匹配的 k 正则简单图的例子.

17. 图 G 的一个 k 正则支撑子图称为 G 的一个 k 因子. 若图 G 中存在两两无公共边的 k 因子 $H_1,H_2,\cdots,H_n$，使得

$$G=H_1\cup H_2\cup\cdots\cup H_n,$$

则称 G 可以 k 因子分解. 显然，G 的1因子就是 G 的完美匹配；若 G 可以 k 因子分解，则 G 必为正则图. 证明：

(1) 每个2正则图为可以1因子分解的充要条件是图中不包含奇圈；

(2) Petersen 图不可以1因子分解.

18. 对于任何正整数 k，证明：

(1) 任何 k 正则二部图是可以1因子分解的；

(2) 任何 $2k$ 正则图是可以2因子分解的.

19. 两人在图 G 上对弈，双方分别执黑子与白子，轮流向 G 的不同顶点 v_0，$v_1,v_2,\cdots$ 下子，要求当 $i>0$ 时 v_i 与 v_{i-1} 相邻，并规定最后可下子的一方获胜. 若执黑子者先下子，试证明执黑子的一方有取胜策略的充要条件是 G 无完美匹配.

20. 证明可以把8个白子和8个黑子放在64格(8×8)棋盘的格子上，使每行每列恰好有一个白子一个黑子.

第五章　Ramsey 定理

本章我们将重点介绍 Ramsey 定理、容斥原理和鸽巢原理，它们都是组合数学中的基本原理．其中的 Ramsey 问题是图论中非常困难而又引人入胜的问题之一，同时它又有强烈的实用背景，所以成为图论研究的热点之一．

5.1　Ramsey 数

在 4.1 节中我们定义了独立集和团的概念．直觉上，若简单图 G 不含顶点数较多的团，则 G 似乎应该包含顶点数较多的独立集．1958 年 6－7 月号美国《数学月刊》上登载了这样一个有趣的问题："任何 6 个人的聚会，其中总会有 3 个人互相认识或 3 个人互不认识．" 这就是著名的 Ramsey 问题．如果我们用一个 6 阶图来描述上述问题，用图 G 的每个顶点代表每个人，两个顶点相邻当且仅当它们相应的两个人互相认识．这样一来，上述 Ramsey 问题就可以描述为对任何一个 6 阶图，它或者含有 3 团，或者含有 3 独立集．Ramsey 于 1930 年首先证实了这一点，他指出只要简单图 G 的顶点数适当多，就可以保证或者含有给定顶点数的团，或者 G 含有给定顶点数的独立集．

给定正整数 k 和 l，若存在一个正整数 n，使得任何 n 阶简单图或者含有 k 团或者含有 l 独立集，则记之为 $n \to (k,l)$．并称使 $n \to (k,l)$ 成立的最小正整数 n 为 Ramsey 数，记作 $r(k,l)$．Ramsey 问题实质上是只要使简单图的阶数达到一定程度，不管边数是多少，也无论边怎样分布，总会出现 k 团或 l 独立集．

由 Ramsey 数的定义容易得到如下结论：

(1) $n' \geqslant n$，且 $n \to (k,l)$，则 $n' \to (k,l)$；

(2) 若 $r(k,l)$ 存在，则 $r(l,k)$ 也存在，且 $r(l,k) = r(k,l)$；

(3) $r(1,l) = 1 = r(l,1)$；

(4) $r(2,l) = l, r(k,2) = k$．

证明

(1) 是显然的，因为任何 n' 阶简单图中存在 n 阶子图．

(2) 设 G 是任一个 $r(k,l)$ 阶简单图，则 $\bar{G}$ 也是一个 $r(k,l)$ 阶简单图，由定

义知$\bar{G}$或者含有k团或者含有l独立集，从而G或者含有k独立集或者含有l团，所以$r(l,k)$存在，且有$r(l,k)\leqslant r(k,l)$，同理可证$r(k,l)\leqslant r(l,k)$.

(3) 因为任何一个1阶简单图(即K_1)都含有1团，所以$r(1,l)\leqslant 1$，从而$r(1,l)=1$，于是由(2)知$r(l,1)=1$.

(4) 由(2)知，只须证明$r(2,l)=l$，当$l=1$时，由(3)知$r(2,l)=l$，下设$l\geqslant 2$.设G是任一个l阶简单图，若G不是空图，则G必含有2团；若G是空图，则G含有l独立集. 另外，$l-1$阶空图既不含有2团，也不含有l独立集，因此$r(2,l)=l$. □

接下来，我们证明Ramsey数$r(k,l)$的存在性，即Ramsey定理.

定理5.1.1(Ramsey,1930) 对任何正整数k和l，有$r(k,l)$都存在.

证明 对k和l使用双重归纳法. 已知对任何正整数k和l，$r(1,l)=r(k,1)=1$，下设$k\geqslant 2$，$l\geqslant 2$.假设$r(k-1,l)$和$r(k,l-1)$存在，今证明

$$r(k-1,l)+r(k,l-1)\rightarrow(k,l). \tag{5.1.1}$$

设G是任意一个$r(k-1,l)+r(k,l-1)$阶简单图，设$v\in V(G)$，因为

$$d_G(v)+d_{\bar{G}}(v)=r(k-1,l)+r(k,l-1)-1,$$

所以下列两种情况必有一种出现：

(1) $d_G(v)\geqslant r(k-1,l)$；

(2) $d_{\bar{G}}(v)\geqslant r(k,l-1)$.

若(1)出现，记$N_G(v)=S$，则$|S|\geqslant r(k-1,l)$，从而$G[S]$中或者含有$k-1$团，或者含有l独立集，于是$G[S\cup\{v\}]$中或者含有k团，或者含有l独立集.

若(2)出现，注意到$r(k,l-1)=r(l-1,k)$，通过类似推理，也能得知G中或者含有k团，或者含有l独立集.

综上，式(5.1.1)得证，从而$r(k,l)$存在. □

下面我们讨论$r(k,l)$的上界.

定理5.1.2 对任何正整数$k\geqslant 2$和$l\geqslant 2$，有

$$r(k,l)\leqslant r(k-1,l)+r(k,l-1); \tag{5.1.2}$$

并且若$r(k-1,l)$和$r(k,l-1)$都是偶数，则有

$$r(k,l)\leqslant r(k-1,l)+r(k,l-1)-1. \tag{5.1.3}$$

证明 式(5.1.2)由式(5.1.1)直接得到，下面证明式(5.1.3).

设G是任意一个$r(k-1,l)+r(k,l-1)-1$阶简单图，由条件知，G有奇数个顶点，由握手引理，G中存在偶点v，于是，或者$d_G(v)\geqslant r(k-1,l)-1$，或者$d_{\bar{G}}(v)\geqslant r(k,l-1)$.因为$d_G(v)$与$r(k-1,l)$同为偶数，所以若$d_G(v)\geqslant$

$r(k-1,l)-1$，则 $d_G(v)\geqslant r(k-1,l)$，从而根据定理 5.1.1 的证明知，G 或者含有 k 团，或者含有 l 独立集. □

定理 5.1.3

$$r(k,l)\leqslant\binom{k+l-2}{k-1}. \tag{5.1.4}$$

证明　对 $k+l$ 用归纳法，利用 $r(1,l)=r(k,1)=1$ 及 $r(2,l)=l$，$r(k,2)=k$ 知，$k+l\leqslant 5$ 时，式(5.1.4) 成立. 设 m 和 n 为正整数，假设式(5.1.4) 对于满足 $5\leqslant k+l\leqslant m+n$ 的一切正整数 k 和 l 都成立，则由定理 5.1.2 有

$$\begin{aligned}r(m,n)&\leqslant r(m,n-1)+r(m-1,n)\\&\leqslant\binom{m+n-3}{m-1}+\binom{m+n-3}{m-2}=\binom{m+n-2}{m-1}.\end{aligned}$$

故对一切正整数 k 和 l，式(5.1.4) 成立. □

求出 Ramsey 数的精确值是一个非常困难的问题. 为此，人们往往采用先确定其上界和下界的方法，以缩小 Ramsey 数所在的范围，然后希望计算出 Ramsey 数 $r(k,l)$ 的精确值. 定理 5.1.2 就给出了 Ramsey 数的递推上界(定理 5.1.3 给出的上界比定理 5.1.2 弱)，而下界则可以通过构造适当的图(既不含 k 团也不含 l 独立集) 来获得.

图 5.1.1 是一个 5 圈，它既不含 3 团也不含 3 独立集，故有 $r(3,3)\geqslant 6$，图 5.1.2 既不含 3 团也不含 4 独立集，故 $r(3,4)\geqslant 9$.

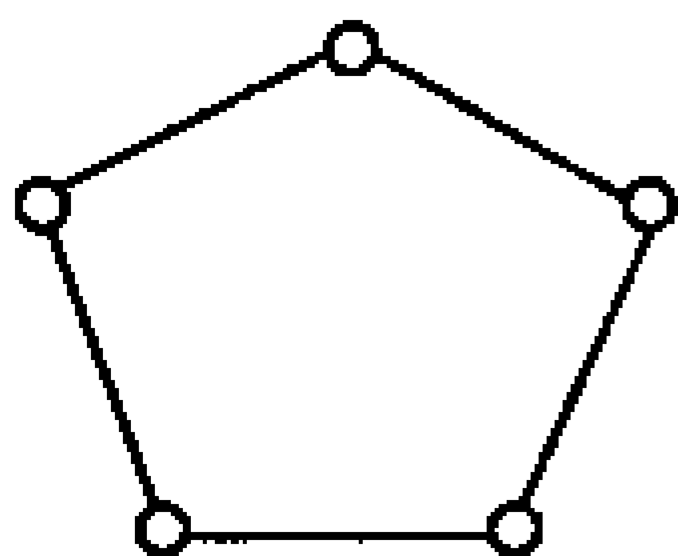


图 5.1.1　既不含 3 团，也不含 3 独立集

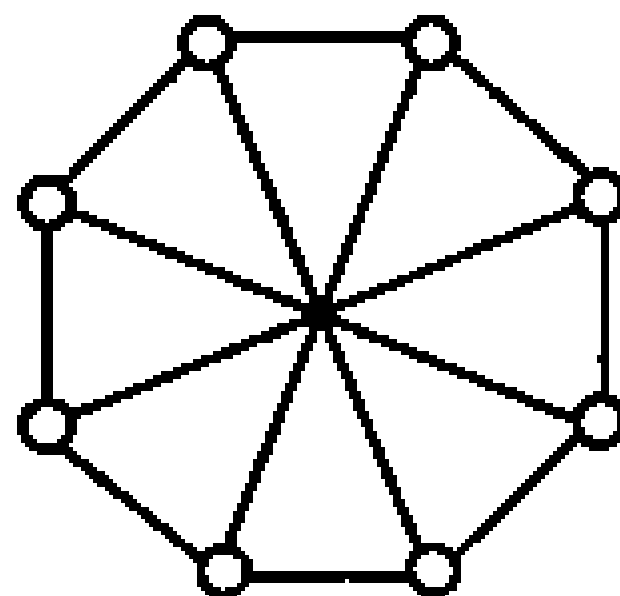


图 5.1.2　既不含 3 团，也不含 4 独立集

同样，通过构造图 5.1.3 可知 $r(3,5)\geqslant 14$，通过构造图 5.1.4 知 $r(4,4)\geqslant 18$，从而由定理 5.1.2 有

$$r(3,3)\leqslant r(2,3)+r(3,2)=6,\ \text{故}\ r(3,3)=6;$$
$$r(3,4)\leqslant r(2,4)+r(3,3)=9,\ \text{故}\ r(3,4)=9;$$
$$r(3,5)\leqslant r(2,5)+r(3,4)=14,\ \text{故}\ r(3,5)=14;$$
$$r(4,4)\leqslant r(3,4)+r(4,3)=18,\ \text{故}\ r(4,4)=18.$$

到目前为止，对于 $k,l\geqslant 3$，已知的 Ramsey 数只有如下 9 个，如表 5.1.1.

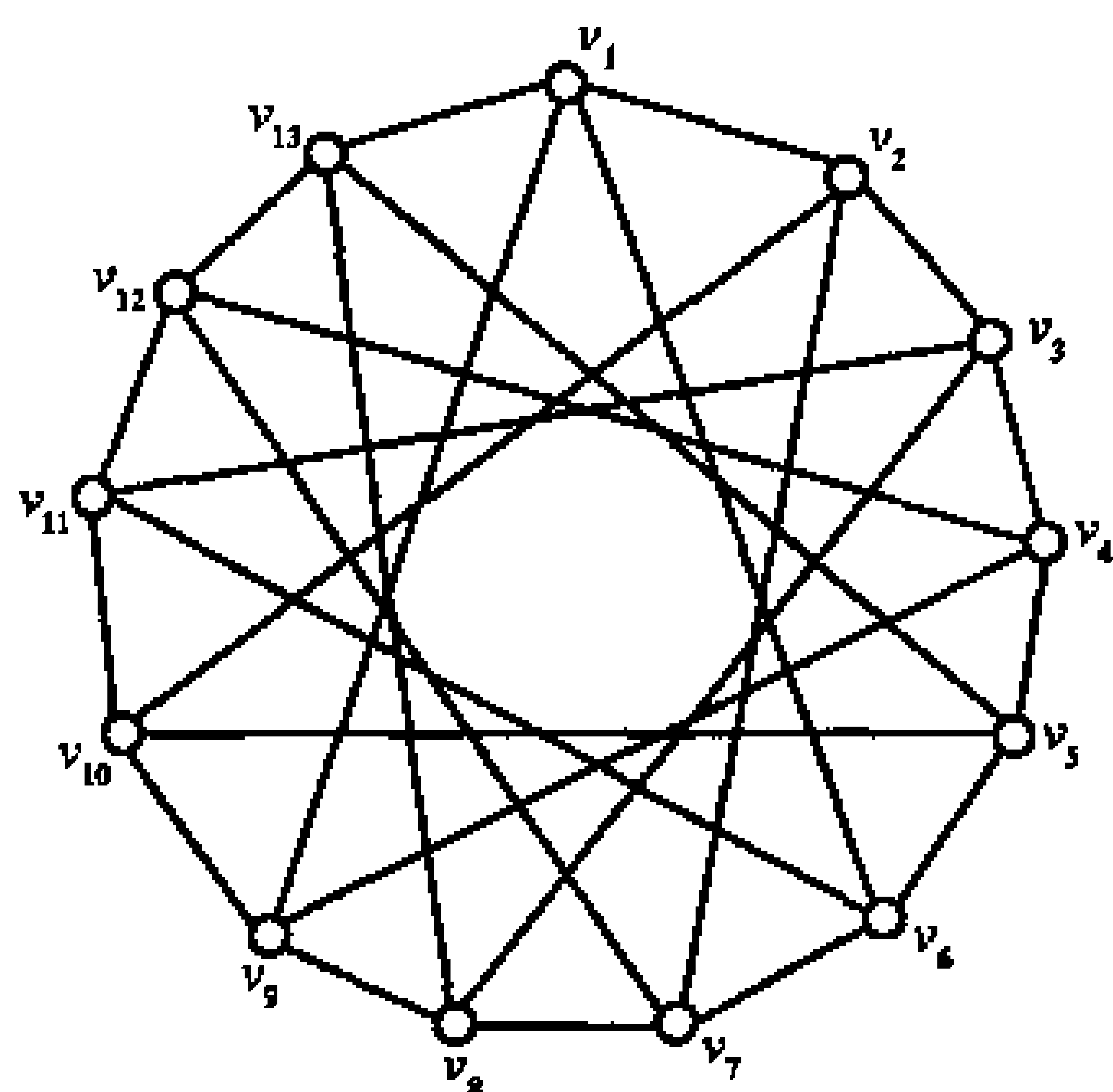


图 5.1.3 既不含 3 团，也不含 5 独立集

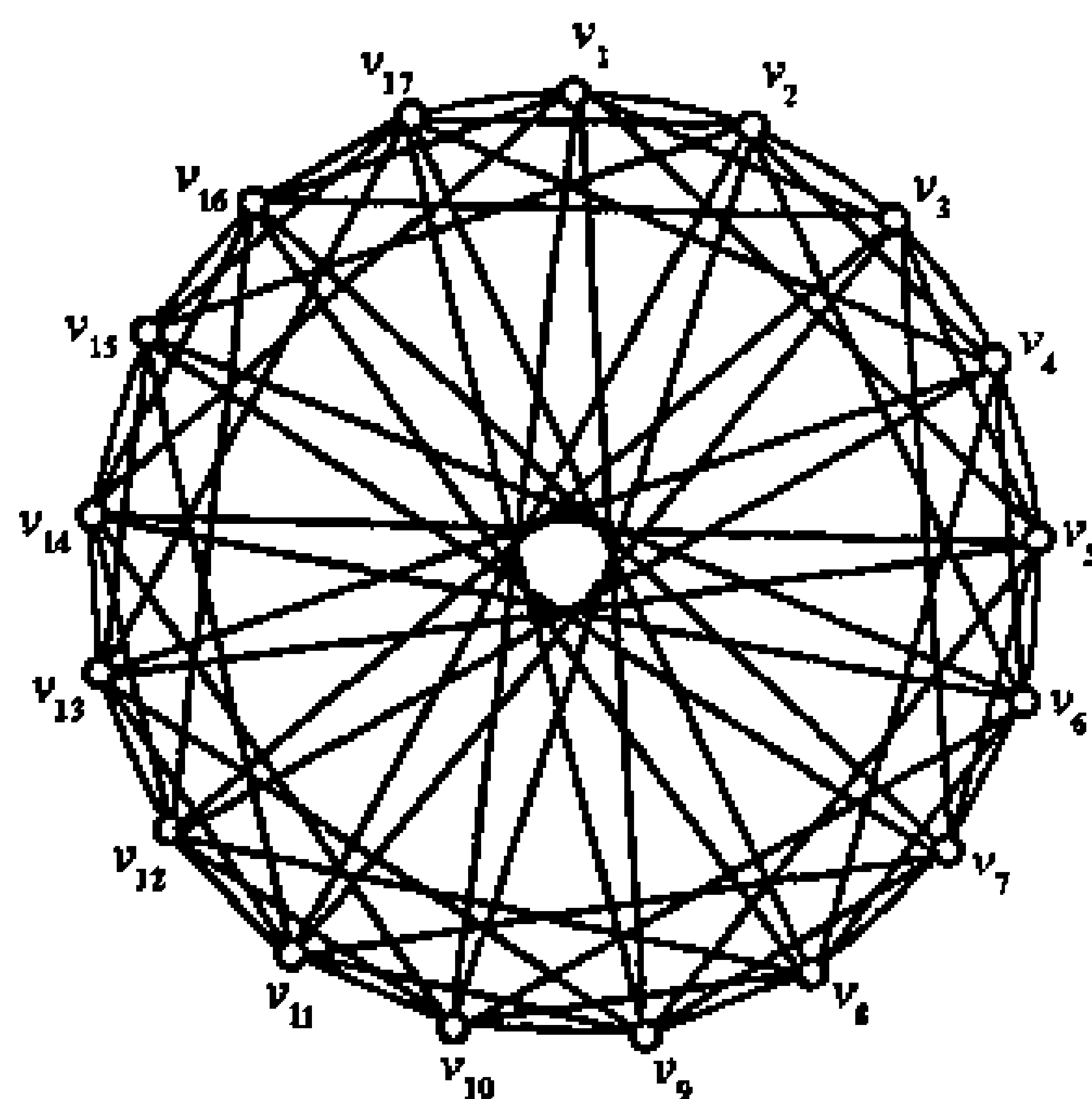


图 5.1.4 既不含 4 团，也不含 4 独立集

表 5.1.1 Ramsey 数或 Ramsey 数的上、下界

k \ l	3	4	5	6	7	8	9	10	11	…
3	6	9	14	18	23	28	36	40 43	46 51	…
4		18	25	35 41	49 61	53 84	69 115	80 149	96 191	…

最后讨论 Ramsey 数的下界.

定理 5.1.4 $r(k,k) > k \cdot 2^{k/2-2}$.

证明 因为 $r(1,1) = 1 > 2^{3/2}$，$r(2,2) = 2 > 2 \cdot 2^{1-2} = 1$，定理成立.故以下假设 $k \geqslant 3$.用 $\mathscr{G}_n$ 表示以 $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ 为顶点集的一切简单图的集合，$\mathscr{G}_n^k$ 表示 $\mathscr{G}_n$ 中具有 k 团的图的集合.由于 $\mathscr{G}_n$ 中图最多有 $m = \binom{n}{2}$ 条边，即 $\mathscr{G}_n$ 中图的边数只能是 $0, 1, \cdots, m-1, m$，因此

$$|\mathscr{G}_n| = \binom{m}{0} + \binom{m}{1} + \cdots + \binom{m}{m} = 2^{\binom{n}{2}}, \tag{5.1.5}$$

类似地，$\mathscr{G}_n$ 中包含指定的 k 个顶点的团的图的个数为 $2^{\binom{n}{2}-\binom{k}{2}}$，又因为 $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ 中任意取定 k 个顶点的方法有 $\binom{n}{k}$ 种，并注意到一个图可以有多少个不同的 k 团，所以，

$$|\mathscr{G}_n^k| \leqslant \binom{n}{k} \cdot 2^{\binom{n}{2}-\binom{k}{2}}. \tag{5.1.6}$$

于是由式(5.1.5) 和式(5.1.6) 有

$$\frac{|\mathcal{G}_n^k|}{|\mathcal{G}_n|} \leqslant \binom{n}{k} \cdot 2^{-\binom{k}{2}} < n^k \cdot 2^{-\binom{k}{2}} / k!. \tag{5.1.7}$$

假若 $n \leqslant k \cdot 2^{k/2-2}$,则由式(5.1.7) 得

$$\frac{|\mathcal{G}_n^k|}{|\mathcal{G}_n|} < k^k \cdot 2^{k^2/2-2k-k(k-1)/2}/k! = k^k \cdot 2^{-3k/2}/k!,$$

令 $l_k = k^k \cdot 2^{-3k/2}/k!$,则

$$\frac{l_k}{l_{k+1}} = \left(\frac{k}{k+1}\right)^k \cdot 2^{3/2} = \frac{2^{3/2}}{(1+\frac{1}{k})^k} > \frac{2^{3/2}}{e} > 1,$$

即 $\{l_k\}$ 单调减少,而 $l_3 < \frac{1}{2}$,故 $l_k < \frac{1}{2}(k = 3,4,\cdots)$ 于是有

$$\frac{|\mathcal{G}_n^k|}{|\mathcal{G}_n|} < \frac{1}{2}, \quad k \geqslant 3,$$

这就是说,$\mathcal{G}_n$ 中含k 团的图不足半数.以$\widetilde{\mathcal{G}}_n^k$ 记$\mathcal{G}_n$ 中具有k 独立集的图的集合,则 $\forall G \in \widetilde{\mathcal{G}}_n^k$,$G$ 的补图$\bar{G} \in \mathcal{G}_n^k$.反之,$\forall H \in \mathcal{G}_n^k$,也有 $\bar{H} \in \widetilde{\mathcal{G}}_n^k$,因此有 $|\widetilde{\mathcal{G}}_n^k| = |\mathcal{G}_n^k|$,即$\mathcal{G}_n$ 中含有k 独立集的图也不足半数.于是,只要 $n \leqslant k \cdot 2^{k/2-2}$,$\mathcal{G}_n$ 中必有某个图既不含 k 团也不含k 独立集,故 $r(k,k) > k \cdot 2^{k/2-2}$. □

推论 5.1.5　记 $m = \min\{k,l\}$,则 $r(k,l) > m \cdot 2^{m/2-2}$.

证明　因为任何 $r(k,l)$ 阶简单图 G 中或者含有k 团或者含有l 独立集,所以 G 或者含有m 团或者含有m 独立集,故 $r(k,l) \geqslant r(m,m)$,于是由定理5.1.4即知推论成立. □

定理 5.1.4 使用的证明方法被匈牙利数学家 Erdös 命名为"概率方法",它是一种重要的非构造性证明 Ramsey 数下界的方法,常常用来证明某类图的存在性.

在 Ramsey 数这一领域中还有大量的工作需要去做.Ramsey 数的精确值很难确定,以至于时至今日 $r(5,5)$ 尚不为人所知.1988 年 Thomason 证明了当 k 充分大时,有 $r(k,k) \leqslant 2^{2k}/k$,这是到目前为止已知的最好上界.于是,人们猜想存在一个常数 c(甚至可能 $c = 1$) 使得 $r(k,k) = 2^{(c+o(1))k}$,但这只是人们的猜想而已,至今该猜想还远没有得到证明.

5.2　Turán 定理

Turán 定理同 Ramsey 数一样,也涉及到图的团,它是极值图论中一个重要的

结论.本节将证明这一著名定理,为此先给出一个概念.若图 G 的顶点集 V 可以分划成 $V = V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_k$,这里 $V_i \cap V_j = \emptyset(1 \leqslant i < j \leqslant k)$,且 V_i 中任何两个顶点在 G 中都不相邻,则称 G 是 k 部图(k-partite graph).又若 $V_i \neq \emptyset(1 \leqslant i \leqslant k)$,且 V_i 中任一顶点与 V_j 中任一顶点之间恰有一条边相连 $(1 \leqslant i < j \leqslant k)$,则称 G 为完全 k 部图(complete k-partite graph).

记 k 和 ν 是两个正整数,问不包含 $k+1$ 阶完全图的 ν 阶简单图至多有多少条边?这就是 Turán 于 1941 年提出并解决的一个问题,下面我们以 Erdös 的一个结果来导出 Turán 定理.

定理 5.2.1(Erdös,1970) 若简单图不含 K_{k+1},则存在一个以 $V = V(G)$ 为顶点集的完全 k 部图 H,使得 $d_G(x) \leqslant d_H(x)(\forall x \in V)$,而且若 $d_G(x) = d_H(x)(\forall x \in V)$,则 $G \cong H$.

证明 对 k 进行归纳,当 $k = 1$ 时,G 是空图,只需取 $H = G$.

假设对所有 $k < n$ 的正整数 k,定理成立.设 G 是不含 K_{n+1} 的简单图$(n \geqslant 2)$.选取 G 的一个度最大的顶点 v,记 $W = N_G(v)$,因 G 不含 K_{n+1},故 $G_0 = G[W]$ 不含 K_n,根据归纳假设,存在一个以 W 为顶点集的完全 $n-1$ 部图 H_0,使

$$d_{G_0}(x) \leqslant d_{H_0}(x) \quad (\forall x \in W). \tag{5.2.1}$$

令 H_1 是以 $V \setminus W$ 为顶点集的空图,把 H_0 的每个顶点与 H_1 的每个顶点之间连一条边,所得到的图记为 H,则 H 是一个完全 n 部图,当 $x \in W$ 时,由式(5.2.1)有

$$\begin{aligned} d_G(x) &\leqslant d_{G_0}(x) + |V \setminus W| \\ &\leqslant d_{H_0}(x) + |V \setminus W| \\ &= d_H(x), \end{aligned} \tag{5.2.2}$$

当 $x \in V \setminus W$ 时,由于 $d_G(v) = \Delta(G) = |W|$,因此

$$d_G(x) \leqslant \Delta(G) = |W| = d_H(x), \tag{5.2.3}$$

由式(5.2.2)和式(5.2.3)即得定理的前半部分.

现在假设,$\forall x \in V, d_G(x) = d_H(x)$,显然有

$$d_G(x) = d_H(x) \quad (\forall x \in W), \tag{5.2.4}$$

$$d_G(x) = d_H(x) = \Delta(G) \quad (\forall x \in V \setminus W), \tag{5.2.5}$$

从而由式(5.2.4)和式(5.2.5)有

$$d_{G_0}(x) = d_{H_0}(x) \quad (\forall x \in W). \tag{5.2.6}$$

根据归纳假设,$G_0 \cong H_0$,由于 W 中任何顶点与 $V \setminus W$ 中任何顶点在 H 中都相邻,因此由式(5.2.4)和式(5.2.6)知,W 中任何顶点与 $V \setminus W$ 中任何顶点在 G

中也都相邻，于是由式(5.2.5)知，$V\setminus W$ 中任何两个顶点在 G 中必不相邻，所以 $G\cong H$. □

设 G 是 ν 阶完全 k 部图，若

$$\lfloor \nu/k\rfloor \leqslant |V_i| \leqslant \lceil \nu/k\rceil \quad (\forall 1\leqslant i\leqslant k),$$

则把 G 记作 $T_{\nu,k}$，即 $T_{\nu,k}$ 中任何两个 V_i, V_j 的顶点数最多相差 1.

引理 5.2.2　设 G 是 ν 阶完全 k 部图，则 $\varepsilon(G)\leqslant\varepsilon(T_{\nu,k})$. 并且，若 $\varepsilon(G)=\varepsilon(T_{\nu,k})$，则 $G\cong T_{\nu,k}$.

证明　首先证明：若 G 不同构于 $T_{\nu,k}$，则存在一个 ν 阶完全 k 部图 G'，使得 $\varepsilon(G)<\varepsilon(G')$，设 G 的 k 部分的顶点数依次为 $m_1, m_2, \cdots, m_k$，因 G 不同构于 $T_{\nu,k}$，故不妨设 $m_1-m_2>1$，考虑如下的 ν 阶完全 k 部图 G'：它的 k 部分的顶点数分别为 $m_1-1, m_2+1, m_2, \cdots, m_k$，由于

$$\varepsilon(G)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}(\nu-m_i)m_i,$$

$$\varepsilon(G')=\frac{1}{2}\sum_{i=3}^{k}(\nu-m_i)m_i+\frac{1}{2}(\nu-m_1+1)(m_1-1)+\frac{1}{2}(\nu-m_2-1)(m_2+1),$$

因此　$$\varepsilon(G')=\varepsilon(G)+(m_1-m_2)-1>\varepsilon(G).$$

这说明：若 G 是边数最多的 ν 阶完全 k 部图，则 $G\cong T_{\nu,k}$，并且在同构意义下，边数最多的 ν 阶完全 k 部图只能是 $T_{\nu,k}$. □

需要指出的是，$T_{\nu,k}$ 的补图 $\bar{T}_{\nu,k}$ 是一些点不相交的完全图的并，且当 $\nu=mk+r, 0\leqslant r<k$ 时，有

$$\varepsilon(T_{\nu,k})=\binom{\nu}{2}-r\binom{m+1}{2}+(k-r)\binom{m}{2},$$

$$\begin{aligned}\varepsilon(\bar{T}_{\nu,k})&=r\binom{m+1}{2}+(k-r)\binom{m}{2}\\&=\frac{1}{2k}(\nu-r)(\nu-k+r)\\&=\frac{1}{2k}[\nu(\nu-k)+r(k-r)].\end{aligned}$$

若用 $ex(\nu,K_{k+1})$ 表示不含 K_{k+1} 的 ν 阶简单图的最大边数，则有如下的定理.

定理 5.2.3(Turán, 1941)　$ex(\nu,K_{k+1})=\varepsilon(T_{\nu,k})$，并且 $T_{\nu,k}$ 是不含 K_{k+1} 且边数等于 $ex(\nu,K_{k+1})$ 的惟一的简单图(在同构意义下).

证明　设 ν 阶简单图 G 不含 K_{k+1}，由定理 5.2.1 知，存在一个以 $V(G)$ 为顶

点集的完全 k 部图H,使

$$d_G(x) \leqslant d_H(x) \quad (\forall x \in V(G)), \tag{5.2.7}$$

故由引理 5.2.2 有

$$\varepsilon(G) \leqslant \varepsilon(H) \leqslant \varepsilon(T_{\nu,k}), \tag{5.2.8}$$

显然 $T_{\nu,k}$ 不含K_{k+1},因此由 G 的任意性知$ex(\nu, K_{k+1}) = \varepsilon(T_{\nu,k})$.

又若 $\varepsilon(G) = \varepsilon(T_{\nu,k})$,则由式(5.2.8) 有 $\varepsilon(G) = \varepsilon(H)$,由式(5.2.7) 得 $d_G(x) = d_H(x) \quad (\forall x \in V(G))$,根据定理 5.2.1,$G$ 是完全k 部图,再由引理 5.2.2 知 $G \cong T_{\nu,k}$. □

推论 5.2.4 设 G 是不含$k+1$ 独立集的 ν 阶简单图,则 $\varepsilon(G) \geqslant \varepsilon(\bar{T}_{\nu,k})$,并且上式中等号成立,当且仅当 $G \cong \bar{T}_{\nu,k}$.

证明 显然,G 不含$k+1$ 独立集,当且仅当 $\bar{G}$ 不含K_{k+1},于是由定理 5.2.3 知 $\varepsilon(\bar{G}) \leqslant \varepsilon(T_{\nu,k})$,并且 $\varepsilon(\bar{G}) = \varepsilon(T_{\nu,k})$,当且仅当 $\bar{G} \cong T_{\nu,k}$,因此

$$\varepsilon(G) = \binom{\nu}{2} - \varepsilon(\bar{G}) \geqslant \binom{\nu}{2} - \varepsilon(T_{\nu,k}) = \varepsilon(\bar{T}_{\nu,k}),$$

并且 $\varepsilon(G) = \varepsilon(\bar{T}_{\nu,k})$,当且仅当 $G \cong \bar{T}_{\nu,k}$. □

由推论 5.2.4 可以给出独立数的一个下界.

推论 5.2.5 设 G 为简单图,则 $\alpha(G) \geqslant \dfrac{\nu^2(G)}{\nu(G)+2\varepsilon(G)}$,并且式中等号成立,当且仅当 G 是点不相交的同阶完全图的并.

证明 设 $\alpha(G) = k$,则 G 不含$k+1$ 独立集,从而由推论 5.2.4 有

$$\varepsilon(G) \geqslant \varepsilon(\bar{T}_{\nu,k}) = \frac{1}{2k}[\nu(\nu-k) + r(k-r)],$$

其中 $\nu = \nu(G), \nu = mk + r(0 \leqslant r < k)$,于是

$$\varepsilon(G) \geqslant \frac{1}{2k}\nu(G)(\nu(G)-k),$$

即知

$$\alpha(G) = k \geqslant \frac{\nu^2(G)}{\nu(G)+2\varepsilon(G)},$$

并且上式左端等于右端,当且仅当 $G \cong \bar{T}_{\nu,k}$,且 $r=0$,这等价于 G 是点不交的同阶完全图的并. □

5.3 容斥原理

对于一个 ν 阶图G,若它不包含 $k+1$ 团,则它的边数是受到限制的,不能超

过 $\varepsilon(T_{\nu,k})$. 同样,它的顶点的度数也是有限制的. 例如,对于 4 阶图,若它不含三角形 K_3,则它的最小度必然不大于 2,否则,它就是 4 阶完全图,当然含 K_3 了. 在给出图 G 的顶点的度限制之前,先介绍下面有用的原理 —— 容斥原理.

设 S 是一有限集合,P_1 和 P_2 是 S 上的两个性质,即 S 中的元素具有或者不具有性质 P_1 或 P_2. 现在要计算 S 中既不具有性质 P_1 也不具有性质 P_2 的元素的个数. 为此,我们从 $|S|$ 中去掉具有性质 P_1 的元素个数,再去掉具有性质 P_2 的元素个数,这样,就将既具有性质 P_1 又具有性质 P_2 的元素个数从 $|S|$ 中去除了两次,所以要补一次. 设 A_1, A_2 分别是 S 中具有性质 P_1, P_2 的元素构成的集合,则 $\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2$ 就是 S 中既不具有性质 P_1 也不具有性质 P_2 的元素构成的集合,且有

$$|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2| = |S| - |A_1| - |A_2| + |A_1 \cap A_2|.$$

一般地,若 S 上有 m 个性质 $P_1, P_2, \cdots, P_m$,则有定理 5.3.1 所描述的容斥原理.

定理5.3.1(容斥原理) 设 S 是有限集合,$P_1, P_2, \cdots, P_m$ 是同集合 S 有关的 m 个性质,设 A_i 是 S 中具有性质 P_i 的元素构成的集合 $(1 \leqslant i \leqslant m)$,$\bar{A}_i$ 是 S 中不具性质 P_i 的元素构成的集合 $(1 \leqslant i \leqslant m)$,则 S 中不具性质 $P_1, P_2, \cdots, P_m$ 的元素个数为

$$\begin{aligned} |\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \cdots \cap \bar{A}_m| &= |S| - \sum_{i=1}^{m} |A_i| + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant m} |A_i \cap A_j| \\ &\quad - \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant m} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots \\ &\quad + (-1)^m |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m|. \end{aligned} \tag{5.3.1}$$

证明 等式(5.3.1) 的左端表示的是 S 中不具有性质 $P_1, P_2, \cdots, P_m$ 的元素的个数. 下面我们来证明:对于 S 中每个元素 x,若 x 不具有性质 $P_1, P_2, \cdots, P_m$,它对式(5.3.1) 右端贡献 1,否则,即 x 具有某些性质 $P_i(1 \leqslant i \leqslant m)$,它对式(5.3.1) 右端的贡献为 0,从而证明式(5.3.1).

任给 $x \in S$,则

① 当 x 不具有性质 $P_1, P_2, \cdots, P_m$ 时,即 $x \notin A_1, x \notin A_2, \cdots, x \notin A_m$,而 $x \in S$,所以 x 对式(5.3.1) 右端的贡献为 $1 - 0 + 0 + \cdots + 0 = 1$.

② 当 x 恰具有 $P_1, P_2, \cdots, P_m$ 中的 $n(n \geqslant 1)$ 个性质 $P_{i_1}, P_{i_2}, \cdots, P_{i_n}$ 时,即 $x \in A_{i_1}, x \in A_{i_2}, \cdots, x \in A_{i_n}$,而 $x \notin A_i(\forall i \notin \{i_1, i_2, \cdots, i_n\})$.

x 对 $|S|$ 的贡献为 $1 = \binom{n}{0}$,x 对 $\sum_{i=1}^{m} |A_i|$ 的贡献为 $n = \binom{n}{1}$,x 对 $\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant m}$

$|A_i \cap A_j|$ 的贡献为$\binom{n}{2}$(只有当 $i,j \in \{i_1,\cdots,i_n\}$ 时,$x \in A_i \cap A_j$),x 对 $\sum\limits_{1\leqslant i<j<k\leqslant m}|A_i \cap A_j \cap A_k|$ 的贡献为$\binom{n}{3}$,$\cdots$,x 对 $|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m|$ 的贡献为$\binom{n}{m}$,于是,x 对式(5.3.1)右端的贡献为

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\cdots+(-1)^m\binom{n}{m}=\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}$$
$$=(1-x)^n|_{x=1}=0.$$ □

推论 5.3.2 设 S 是一有限集合,$P_1,P_2,\cdots,P_m$ 是 S 上的 m 个性质,记 A_i 是 S 中具有性质 P_i 的元素构成的集合($1\leqslant i\leqslant m$),则 S 中至少具有一个性质 P_i 的元素个数为

$$\begin{aligned}&|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m|\\ =&\sum_{i=1}^{m}|A_i|-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant m}|A_i \cap A_j|+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant m}|A_i \cap A_j \cap A_k|\\ &+\cdots+(-1)^{m-1}|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m|.\end{aligned} \tag{5.3.2}$$

证明 因为

$$\begin{aligned}|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m| &= |S|-|\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m}|\\ &=|S|-|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \cdots \cap \bar{A}_m|,\end{aligned}$$

所以由定理 5.3.1 知式(5.3.2)成立. □

下面利用容斥原理,给出图 G 不含有 $k+1$ 团的最小度限制.

定理 5.3.3(Zarankiewicz,1947) 设 G 为 ν 阶简单图,且不含有 $k+1$ 团,$k\geqslant 1$,则有

$$\delta(G)\leqslant\lfloor(k-1)\nu/k\rfloor. \tag{5.3.3}$$

证明(反证法): 设 $(k-1)\nu=mk+r(0\leqslant r<k)$,假设式(5.3.3)不成立,则 $d(x)\geqslant m+1(\forall x \in V(G))$.

任取一顶点 $x_1 \in V(G)$,A_1 表示 G 中与 x_1 相邻的顶点的集合,再任取 $x_2 \in A_1$,A_2 为 G 中与 x_2 相邻的顶点构成的集合,由容斥原理

$$|A_1 \cap A_2|=|A_1|+|A_2|-|A_1 \cup A_2|. \tag{5.3.4}$$

又因 $d(x)\geqslant m+1(\forall x \in V(G))$,故 $|A_i|\geqslant m+1\ (i=1,2)$. $|A_1 \cup A_2|\leqslant |V(G)|=\nu$,由式(5.3.4)知

$$|A_1 \cap A_2|\geqslant 2(m+1)-\nu>0,$$

从而 $A_1 \cap A_2 \neq \varnothing$,再任取 $x_3 \in A_1 \cap A_2$,记 G 中与 x_3 相邻的顶点集合为 A_3,同样,由容斥原理可得,

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| \geqslant 3(m+1) - 2\nu > 0.$$

如此下去,可知对于 $x_k \in \bigcap_{j=1}^{k-1} A_j$,取 G 中与 x_k 相邻的顶点集 A_k,有

$$\begin{aligned}
\left|\bigcap_{j=1}^{k} A_j\right| &= \left|\left(\bigcap_{j=1}^{k-1} A_j\right) \cap A_k\right| \\
&= |A_k| + \left|\bigcap_{j=1}^{k-1} A_j\right| - \left|A_k \cup \left(\bigcap_{j=1}^{k-1} A_j\right)\right| \\
&\geqslant (m+1) + [(k-1)(m+1) - (k-2)\nu] - \nu \\
&= k - r > 0,
\end{aligned}$$

因此,$\bigcap_{j=1}^{k} A_j \neq \emptyset$,存在顶点 $x_{k+1} \in \bigcap_{j=1}^{k} A_j$,由 A_j 的定义可知,$x_1, x_2, \cdots, x_{k+1}$ 两两相邻,所以 $\{x_1, x_2, \cdots, x_{k+1}\}$ 为 G 的 $k+1$ 团,这与已知 G 不含 $k+1$ 团矛盾,从而式(5.3.3)成立. □

利用定理 5.3.3 可以得到定理 5.2.3(即 Turán 定理)的另一种证明方法.

证明 Turán 定理(归纳法) 只需证明:若 G 是不含 $k+1$ 团且边数最多的 ν 阶简单图,则必有 $G \cong T_{\nu,k}$.对于 $\nu = 1, 2, \cdots, k$,显然 G 一定是 ν 阶完全图,从而有 $G \cong T_{\nu,k}$.假设定理对所有阶数小于 ν 的图都成立,往证对 $\nu(\nu > k)$ 阶图 G,定理亦成立.

由定理 5.3.3 知,此时,G 中存在某顶点 x 满足 $d_G(x) \leqslant \lfloor (k-1)\nu/k \rfloor$.考虑 G 的子图 $G_x = G - x$,则 G_x 为不含 $k+1$ 团的 $\nu - 1$ 阶简单图.G_x 可能是边数最多的,也可能不是.如若不是,则可以通过添加边使其达最多.因此,不妨设 G_x 为不含 $k+1$ 团且边数最多的 $\nu - 1$ 阶简单图,由归纳假设知 $G_x \cong T_{\nu-1,k}$,即 G_x 的顶点集可被分划成 k 组,其中有 r 组包含了 $m+1$ 个顶点,而其余 $k-r$ 组包含了 m 个顶点,这里 m, r 满足 $\nu - 1 = mk + r, 0 \leqslant r < k$.且在图 G_x 中,属于同一组的顶点均不相邻,而不属于同一组的顶点均相邻.

由于 G 中不含 $k+1$ 团,因此在 G 中,顶点 x 必与 G_x 的 k 组顶点中的某一组顶点均不相邻.设该组顶点集为 V_0,把顶点 x 加进 V_0.注意到

$$d_G(x) \leqslant \lfloor (k-1)\nu/k \rfloor = (\nu - 1) - m,$$

因为 G 的边数达最多,所以 V_0 中必有 m 个顶点,且 x 必与 V_0 之外的其他顶点均相邻,此即 $G \cong T_{\nu,k}$. □

例 5.3.1 设集合 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, $Y = \{y_1, y_2, \cdots, y_m\}$,且 $n \geqslant m$.求从 X 到 Y 的所有满射的个数 $s_{n,m}$.

解 令 A_i 表示从 X 到 Y,但 y_i 不是 X 中任何一个元素的像的映射的集合,即

$$A_i = \{f: X \to Y \mid y_i \notin f(X)\}, i = 1,2,\cdots,m.$$

从 X 到 Y 上的所有满射的集合与定义在 X 上但值域不属于任一 A_i 的映射的集合相同，因此

$$s_{n,m} = m^n - |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m|.$$

由容斥原理知

$$\begin{aligned} s_{n,m} = m^n &- \sum_{i=1}^{m} |A_i| + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant m} |A_i \cap A_j| + \cdots \\ &+ (-1)^l \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_l \leqslant m} \left| A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_l} \right| \\ &+ \cdots + (-1)^m \left| \bigcap_{i=1}^{m} A_i \right|. \end{aligned}$$

A_i 是定义在 X 上，而在 $Y \setminus \{y_i\}$ 中取值的映射集合，故 $|A_i| = (m-1)^n$. $A_i \cap A_j$ 是定义在 X 上，而在 $Y \setminus \{y_i, y_j\}$ 中取值的映射集合，因此 $|A_i \cap A_j| = (m-2)^n$. 一般地，有

$$\left| A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_l} \right| = (m-l)^n,$$

其中 $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_l \leqslant m$. 又对每一个映射 $f: X \to Y$, $f(X)$ 中至少包含 Y 中一个元素，所以 $\bigcap_{i=1}^{m} A_i = \emptyset$. 而且 $\sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_l \leqslant m} \left| A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_l} \right|$ 包含了 $\binom{m}{l}$ 项 $(m-l)^n$, $l = 1,2,\cdots,m-1$.

综上，我们得到

$$\begin{aligned} s_{n,m} &= m^n - \binom{m}{1}(m-1)^n + \binom{m}{2}(m-2)^n + \cdots + (-1)^{m-1}\binom{m}{m-1} \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i \binom{m}{i} (m-i)^n. \end{aligned}$$

□

特别地，当 $m = n$ 时，$s_{n,n}$ 表示双射 $f: X \to Y$ 的个数，这里 $|X| = |Y| = n$, 因此 $s_{n,n} = n!$, 于是我们得到如下恒等式

$$n! = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)^n.$$

显然，当 $m > n$ 时，$s_{n,m} = 0$.

5.4 鸽巢原理

在这一节中，我们将介绍另一个判定组合问题存在性的原理 —— 鸽巢原理，鸽巢原理也叫做抽屉原理，它与 Ramsey 定理关系密切，它们所揭示的组合问

题在本质上有很大的相似之处，Ramsey 定理可视做鸽巢原理的推广. 鸽巢原理阐述了这样一个简单的事实：如果有一群为数众多的鸽子，要飞进数目较少(相对于鸽子来说)的鸽巢中，则至少有一个鸽巢中飞进了两个或更多的鸽子.

定理 5.4.1(鸽巢原理) 若将 $n+1$ 个物品放入 n 个盒子中，则至少有一个盒子中有两个或更多的物品.

证明(反证法) 若不然，则每个盒子中都至多有一个物品，则 n 个盒子中至多有 n 个物品，这与有 $n+1$ 个物品矛盾. □

例 5.4.1 一年有 365 天，今有 366 人，则其中至少有 2 个人生日相同. □

例 5.4.2 共有 12 个属相，今有 13 个人，则至少有 2 个人的属相相同. □

例 5.4.3 含 3 条边的四阶简单同构图有三种，则在 4 个含 3 条边的四阶简单图中至少有 2 个图是同构的. □

例 5.4.4 设 G 为 n 阶简单图，其最大度为 $\Delta(G)$，若用 $\Delta(G)-1$ 种颜色给这些边染色，则至少有 2 条相邻的边被染成同一种颜色. □

尽管鸽巢原理很简单，但它却能解决一些看似复杂的组合问题，而且在将其应用到具体的问题时，往往需要一定的技巧去构造相应于具体问题的"鸽巢"和"鸽子".

例 5.4.5 对任何 n 阶简单图 $G(n\geqslant 2)$，总存在两个度相等的顶点.

证明 设 G 为任意一个 n 阶简单图($n\geqslant 2$)，分两种情况讨论.

(1) 若存在 $v_0\in V(G)$，使 $d(v_0)=0$，则由 G 是简单图知，$d(v)\leqslant n-2(\forall v\in V(G)\setminus\{v_0\})$. 我们构造 $n-1$ 个"鸽巢"为 $0,1,\cdots,n-2$；n 只"鸽子"为相应的 n 个顶点，当且仅当顶点的度为 i 时，把该顶点放入第 i 个"鸽巢"中. 由鸽巢原理知，至少有一个"鸽巢"里放进了两只或更多的"鸽子"，即至少有两个顶点的度相等.

(2) 若 $d(v)\geqslant 1(\forall v\in V(G))$，则我们构造 $n-1$ 个"鸽巢"为 $1,2,\cdots,n-1$；n 只"鸽子"仍为 n 个顶点，类似于(1)中证明，知结论亦成立. □

例 5.4.6 从 1 到 100 的所有整数中任取 51 个，则这 51 个数中至少有一对数，其中一个能被另一个整除.

证明 设 $a_1,a_2,\cdots,a_{51}$ 是被选取出的 51 个整数，对任意的 a_i，可以惟一地写成如下形式

$$a_i=2^{s_i}r_i,\quad i=1,\cdots,51,$$

其中 s_i 为整数，r_i 为奇数. 显然 r_i 只能取 $1,3,5,\cdots,99$ 这 50 个奇数，而 $r_1,r_2,\cdots,$

r_{51} 共有 51 项，由鸽巢原理，必存在 $i \neq j$，使 $r_i = r_j$，不妨设 $s_i \geqslant s_j$，则有

$$\frac{a_i}{a_j} = 2^{(s_i - s_j)} = \text{整数},$$

即 a_i 能被 a_j 整数. □

推论 5.4.2 若将 m 个物品放入 n 个盒子中，且 $m > n$，则至少有一个盒子中有两个或更多的物品. □

推论 5.4.3 若将 mn 以上个物品放入 n 个盒子中，则至少一个盒子中有 $m + 1$ 个或更多的物品. □

例 5.4.7 对任意 $n^2 + 1$ 个实数 $a_1, a_2, \cdots, a_{n^2+1}$ 组成的序列中，必有一个长为 $n + 1$ 的非降子序列，或必有一个长为 $n + 1$ 的非升子序列.

证明 假设在 $a_1, a_2, \cdots, a_{n^2+1}$ 中没有长为 $n + 1$ 的非降子序列，我们将证明其必有一长为 $n + 1$ 的非升子序列.

令 m_k 表示从 a_k 开始的最长非降子序列的长度，因为假设该序列中没有长为 $n + 1$ 的非降子序列，故有

$$1 \leqslant m_k \leqslant n, \quad \forall k = 1, 2, \cdots, n^2 + 1.$$

这相当于把 $n^2 + 1$ 个物品放入 n 个盒子中，由推论 5.4.3 知，必有某 i 盒中至少有 $n + 1$ 个物品，则存在 $k_1 < k_2 < \cdots < k_{n+1}$ 及 i，使得

$$m_{k_1} = m_{k_2} = \cdots = m_{k_{n+1}} = i.$$

我们断言 $a_{k_1}, a_{k_2}, \cdots, a_{k_{n+1}}$ 必为非升子序列，即必有 $a_{k_1} \geqslant a_{k_2} \geqslant \cdots \geqslant a_{k_{n+1}}$. 若不然，存在某 j 使得 $a_{k_j} < a_{k_{j+1}}$，那么由 $a_{k_{j+1}}$ 开始的最长非降子序列加上 a_{k_j}，就得到一个从 a_{k_j} 开始的长为 $m_{k_{j+1}} + 1$ 的非降子序列，由 m_{k_j} 的定义知

$$m_{k_j} \geqslant m_{k_{j+1}} + 1,$$

此与 $m_{k_j} = m_{k_{j+1}} = i$ 矛盾. 从而断言成立，即 $a_{k_1}, a_{k_2}, \cdots, a_{k_{n+1}}$ 为长是 $n + 1$ 的非升子序列. □

最后我们介绍鸽巢原理的加强形式.

定理 5.4.4 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 都是正整数，如果把 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n - (n - 1)$ 个物品放入 n 个盒子中，则或者第 1 个盒子中至少包含 a_1 个物品，或者第 2 个盒中至少包含 a_2 个物品，…，或者第 n 个盒中至少包含 a_n 个物品.

证明 （反证法） 若任意第 i 个盒中所装的物品都少于 $a_i - 1$（$\forall i = 1, 2, \cdots, n$），则 n 个盒子中总的物品数至多有

$$\begin{aligned}(a_1 - 1) + (a_2 - 1) + \cdots + (a_n - 1) &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n - n \\ &< a_1 + a_2 + \cdots + a_n - n + 1.\end{aligned}$$

此与题设有 $a_1+a_2+\cdots+a_n-(n-1)$ 个物品矛盾. □

例 5.4.8　对任意 6 阶图 G,G 或含 3 团,或含 3 独立集.

证明　设 $V(G)=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6\}$,在这6个顶点中任意取一个顶点,不妨设为 v_1,将其余的5个顶点 $v_2,v_3,\cdots,v_6$ 分成两类:一类是与 v_1 相邻的顶点,另一类是与 v_1 不相邻的顶点.取 $a_1=3,a_2=3,n=2$,由定理 5.4.4 知,将 $5=a_1+a_2-(n-1)$ 个顶点分别放到两类中,则或者第一类中至少有 a_1 个顶点,或者第二类中至少有 a_2 个顶点.即上述两类中至少有一类含有三个或三个以上的顶点.不妨设为第一类中含有 3 个顶点 v_2,v_3,v_4.分两种情况:

① 若 v_2,v_3,v_4 中两两不相邻,则 G 中含有 3 独立集,结论成立.

② 若 v_2,v_3,v_4 中有两个顶点相邻,设 v_2 与 v_3 相邻,则 v_1,v_2,v_3 为 3 团,结论亦成立. □

上述定理和推论都称为鸽巢原理,它们都很简单,可正是这些简单的原理,在初等数学乃至高等数学中都有着广泛的应用.但它的不足之处在于,鸽巢原理只能用来证明组合问题的存在性,只能知道某个鸽巢中至少飞进了两只鸽子,却无法确定究竟是哪个鸽巢,也不能确定该巢中究竟飞进了多少只鸽子.

5.5　Ramsey 定理的推广

从组合数学的角度看,Ramsey 定理和鸽巢原理都是研究某种安排的存在性的,而且它们所揭示的问题在本质上有很大的相似之处,如果将 Ramsey 定理和鸽巢原理结合起来并进一步推广,就可以得到更一般的 Ramsey 定理.

在介绍一般的 Ramsey 定理之前,我们先从另一个角度来考察 Ramsey 数.Ramsey 数 $r(k,l)$ 是所有满足如下条件的图的最小阶数,这些图要么含有 k 团,要么含有 l 独立集.现在考虑用两种颜色 —— 红色和蓝色 —— 给 $r(k,l)$ 阶完全图 G 的边染色,这种染色是随意的,没有任何限制.如果 G 中的某条边被染成了红色,则认为这条边是存在的;否则,如果某边染成了蓝色,则认为该边是不存在的.这样一来,$r(k,l)$ 阶完全图的一种边染色就对应了一个 $r(k,l)$ 阶简单图.l 独立集对应了一个染成蓝色的 l 团,k 团对应了一个染成红色的 k 团.按这种观点,Ramsey 数 $r(k,l)$ 就是这样的最小正整数,它使得对任意给定的两个正整数 k 和 l,使得当 $n\geqslant r(k,l)$ 时,用红、蓝两种颜色来给 K_n 中的边染色,则无论怎样染色,总会使得图 K_n 中有红色的 k 团或蓝色的 l 团.

将红、蓝两色推广到任意 k 种颜色,对 n 阶完全图 K_n 的边用 $c_1,c_2,\cdots,c_k$ 这 k 种颜色进行任意染色.如果对任意的 k 个正整数 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 总存在某个 $1\leqslant$

$i \leqslant k$,使得 K_n 中出现 c_i 颜色的 a_i 团,称满足这种性质的 n 的最小值为广义 Ramsey 数,记为 $r(a_1, a_2, \cdots, a_k)$.当 $k = 2$ 时,就是我们在 5.1 节介绍的 Ramsey 数.

关于广义 Ramsey 数,有如下重要结论.

定理 5.5.1 对任意的正整数 $a_1, a_2, \cdots, a_k$,有

$$r(a_1, a_2, \cdots, a_k) \leqslant r(a_1, r(a_2, \cdots, a_k)).$$

证明 设 $r(a_2, \cdots, a_k) = m, r(a_1, m) = n$.

用 $c_1, c_2, \cdots, c_k$ 这 k 种颜色给 n 阶完全图的边染色.首先把颜色 $c_2, \cdots, c_k$ 视为同一种颜色 b_1,则由 $n = r(a_1, m)$ 知必有 c_1 颜色的 a_1 团出现或 b_1 颜色的 m 团出现,若出现了 c_1 颜色的 a_1 团,结论成立.否则,出现了 b_1 颜色的 m 团,这其实是用颜色 $c_2, \cdots, c_k$ 给 K_m 的边染色,于是由 $m = r(a_2, \cdots, a_k)$ 可知,或者出现 c_2 颜色的 a_2 团,或者出现 c_3 颜色的 a_3 团,…,或者出现 c_k 颜色的 a_k 团,从而结论成立. □

由定理 5.5.1 可知,广义 Ramsey 数是存在的,且关于广义 Ramsey 数也有类似于定理 5.1.2 和定理 5.1.3 结论.

定理 5.5.2 对任意 k 个大于 2 的正整数 $a_1, a_2, \cdots, a_k$,有

$$r(a_1, a_2, \cdots, a_k) \leqslant r(a_1 - 1, a_2, \cdots, a_k) + r(a_1, a_2 - 1, \cdots, a_k) + \cdots + r(a_1, a_2, \cdots, a_k - 1) - (k - 2).$$

证明 令 $N = r(a_1 - 1, a_2, \cdots, a_k) + r(a_1, a_2 - 1, \cdots, a_k) + \cdots + r(a_1, a_2, \cdots, a_k - 1) - (k - 2)$.对 K_N 的边用颜色 $c_1, c_2, \cdots, c_k$ 任意染色.设 v 是 K_N 的任意顶点,在 K_N 中与 v 相联的边共有 $N - 1$ 条边,即与 v 关联的边有 $r(a_1 - 1, a_2, \cdots, a_k) + \cdots + r(a_1, a_2, \cdots, a_k - 1) - k + 1$ 条,由定理 5.4.4 知,这些边中,要么有 c_1 颜色的 $r(a_1 - 1, a_2, \cdots, a_k)$ 条边,要么有 c_2 颜色的 $r(a_1, a_2 - 1, \cdots, a_k)$ 条边,…,要么有 c_k 颜色的 $r(a_1, a_2, \cdots, a_k - 1)$ 条边.

不妨设有 c_i 颜色的 $r(a_1, a_2, \cdots, a_{i-1}, a_i - 1, a_{i+1}, \cdots, a_k)$ 条边.在以这些边与 v 相关联的 $r(a_1, a_2, \cdots, a_i - 1, \cdots, a_k)$ 个顶点所构成的完全图 $K_{r(a_1, a_2, \cdots, a_i - 1, \cdots, a_k)}$ 中,要么有 c_1 颜色的 a_1 团,…,要么有 c_{i-1} 颜色的 a_{i-1} 团,要么有 c_i 颜色的 $a_i - 1$ 团,…,要么有 c_k 颜色的 a_k 团.若有 c_i 颜色的 $a_i - 1$ 团出现,则该 c_i 颜色的 $K_{a_i - 1}$ 加上顶点 v 以及 v 与该 $K_{a_i - 1}$ 之间的边,即构成一个 c_i 颜色的 K_{a_i},从而结论成立.否则,若出现了 c_1 颜色的 a_1 团,或出现了 c_2 颜色的 a_2 团,…,或出现 c_{i-1} 颜色的 a_{i-1} 团,或出现 c_{i+1} 颜色的 a_{i+1} 团,…,或出现 c_k 颜色的 a_k

团,则结论显然已经成立了.

综上所证,知 $r(a_1,a_2,\cdots,a_k)\leqslant N$. □

定理 5.5.2 给出了广义 Ramsey 数的一个上界.类似于定理 5.1.3,关于广义 Ramsey 数有定理 5.5.3,它给出了广义 Ramsey 数的另一个上界.

定理 5.5.3 对任意的正整数 $a_1,a_2,\cdots,a_k,k\geqslant 2$,有

$$r(a_1+1,a_2+1,\cdots,a_k+1)\leqslant\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_k)!}{a_1!\ a_2!\ \cdots\ a_k!}.$$

证明 对 $(a_1+1)+(a_2+1)+\cdots+(a_k+1)$ 用归纳法.当 $a_1=a_2=\cdots=a_k=1$ 时,即 $(a_1+1)+(a_2+1)+\cdots+(a_k+1)=2k$,有

$$r(a_1+1,a_2+1,\cdots,a_k+1)=r(2,2,\cdots,2)=2<\frac{k!}{1!1!\cdots 1!},$$

结论成立.假设当 $2k<(a_1+1)+(a_2+1)+\cdots+(a_k+1)\leqslant n+k$ 时,结论都成立,则当 $(a_1+1)+(a_2+1)+\cdots+(a_k+1)=n+k+1$ 时,即 $a_1+a_2+\cdots+a_k=n+1$,由定理 5.5.2 知

$$\begin{aligned}&r(a_1+1,a_2+1,\cdots,a_k+1)\\ \leqslant\ &r(a_1,a_2+1,\cdots,a_k+1)+r(a_1+1,a_2,\cdots,a_k+1)\\ &+\cdots+r(a_1+1,a_2+1,\cdots,a_k)-k+2,\end{aligned}\tag{5.5.1}$$

由归纳假设知

$$\begin{aligned}r(a_1,a_2+1,\cdots,a_k+1)&=r((a_1-1)+1,a_2+1,\cdots,a_k+1)\\ &\leqslant\frac{(a_1-1+a_2+\cdots+a_k)!}{(a_1-1)!\ a_2!\ \cdots\ a_k!}\\ &=\frac{n!}{(a_1-1)!\ a_2!\ \cdots\ a_k!},\\ &\ \ \vdots\\ r(a_1+1,\cdots,a_i,\cdots,a_k+1)&\leqslant\frac{n!}{a_1!\ a_2!\ \cdots\ (a_i-1)!\ \cdots\ a_k!},\\ &\ \ \vdots\\ r(a_1+1,a_2+1,\cdots,a_k)&\leqslant\frac{n!}{a_1!\ a_2!\ \cdots\ (a_k-1)!},\end{aligned}$$

于是由(5.5.1)式知

$$\begin{aligned}&r(a_1+1,\cdots,a_2+1,\cdots,a_k+1)\\ \leqslant\ &\frac{n!}{(a_1-1)!\ a_2!\ \cdots\ a_k!}+\cdots+\frac{n!}{a_1!\ a_2!\ \cdots\ (a_k-1)!}-k+2\\ =\ &\left(\frac{(n+1)!}{a_1!\ a_2!\ \cdots\ a_k!}\right)\left(a_1+a_2+\cdots+a_k-(k-2)\frac{a_1!\ a_2!\ \cdots\ a_k!}{n!}\right)\cdot\frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

$$= \frac{(n+1)!}{a_1!\ a_2!\ \cdots\ a_k!}\left((n+1)-(k-2)\frac{a_1!\ a_2!\ \cdots\ a_k!}{n!}\right)\cdot\frac{1}{n+1}$$

$$\leqslant \frac{(n+1)!}{a_1!\ a_2!\ \cdots\ a_k!}.$$

即当$(a_1+1)+(a_2+1)+\cdots+(a_k+1)=n+k+1$时，结论亦成立，由归纳原理，定理得证. □

计算 Ramsey 数是一件异常困难的工作，求广义 Ramsey 数的难度更是可想而知了.图论中除了求 Ramsey 数外，还有许多问题与 Ramsey 问题相似.例如，设 G_1 和 G_2 是两个简单图，n 为正整数满足：如果用红蓝两色染 K_n 的边，则无论怎样染，总会出现红色的 G_1，或者出现蓝色的 G_2.记 $r(G_1,G_2)$ 为具有这种性质的最小正整数 n.由 Ramsey 数 $r(k,l)$ 的定义易知，当 G_1 为 k 阶完全图、G_2 为 l 阶完全图时，就有 $r(G_1,G_2)=r(k,l)$.对于一些特殊的图 G_1 和 G_2，可以得到 $r(G_1,G_2)$ 的精确值.

例 5.5.1 证明 $r(K_m,K_{1,n})=(m-1)n+1$.

证明 不妨设 $m\geqslant 2, n\geqslant 2$.对于$(m-1)n$ 阶完全图$K_{(m-1)n}$，由 Turán 定理知，$(m-1)n$ 阶完全$m-1$ 部图 $T_{(m-1)n,(m-1)}$ 中不含 m 团，把 $T_{(m-1)n,(m-1)}$ 中的边染红色，并将$K_{(m-1)n}$ 的其余边染蓝色.可见，这种染色使$K_{(m-1)n}$ 中既不含红色的 K_m，也不含蓝色的 $K_{1,n}$，故 $r(K_m,K_{1,n})\geqslant(m-1)n+1$.

下面对 m 用归纳法证明$r(K_m,K_{1,n})\leqslant(m-1)n+1$.

当 $m=2$时，结论显然成立.假设$r(K_{m-1},K_{1,n})\leqslant(m-2)n+1$，往证$r(K_m,K_{1,n})\leqslant(m-1)n+1$.在$(m-1)n+1$ 阶完全图 $K_{(m-1)n+1}$ 中任取一顶点 v，共有

$$(m-1)n+1=[(m-2)n+1]+n-(2-1)$$

条边与 v 关联，这些边要么染红色，要么染蓝色，由定理 5.4.4 知，要么有$(m-2)n+1$ 条边染红色，要么有 n 条边染蓝色.若有 n 条边染蓝色，则已出现一个蓝色的 $K_{1,n}$.否则，有$(m-2)n+1$ 条边染红色，由归纳假设，以这些红色边与 v 相邻的顶点中必出现一个红色的 K_{m-1}，或出现一个蓝色的 $K_{1,n}$.由于把顶点 v 及相应的红色边加入K_{m-1} 即可得到红色的K_m，因此，无论怎样染$K_{(m-1)n+1}$ 的边，总会出现红色的 K_m，或者出现蓝色的 $K_{1,n}$.即有 $r(K_m,K_{1,n})\leqslant(m-1)n+1$.

□

例 5.5.2 用红、蓝两色染 K_n 的边，则无论怎样染，K_n 中总存在一个 Hamilton 圈 C_n，使得 C_n 或者是单色的，或者由两条单色的链组成.

证明 对 n 用归纳法.当 $n=3$时，结论显然成立.假设对 $n-1$ 阶完全图，结论成立.对 n 阶完全图K_n，去掉K_n 中任一顶点x，则由归纳假设，K_n-x 中有一

个长为 $n-1$ 的圈 C'_{n-1}，使得 C'_{n-1} 或者是单色的，或者 C'_{n-1} 是由两条单色的链组成.

若 C'_{n-1} 是单色的，则无论怎样染与 x 关联的边，结论均成立. 因此，不妨设 C'_{n-1} 是由红色的 (u,v) 链 P 和蓝色的 (u,v) 链 Q 组成. 考察边 xu 的颜色，不妨设 xu 染蓝色，设 u' 为在链 P 上与 u 相邻的顶点. 若 xu' 也染蓝色，则 K_n 上有 n 圈 $C_n = C'_{n-1} - uu' + xu + xu'$，它由红色的 (u',v) 链 $P-uu'$ 和蓝色的 (u',v) 链 $u'xu+Q$ 组成. 若 xu' 染红色，则 n 圈 C_n 由红色的 (x,v) 链 $xu'+P-uu'$ 和蓝色的 (x,v) 链 $xu'+Q$ 组成，即对 n 阶完全图 K_n，结论亦成立. □

例5.5.3 设 G_1, G_2 和 G_3 均为简单图，用红、蓝两种颜色染 K_n 的边，则无论怎样染，只要

$$n \geqslant \max\{r(G_1,G_2)+\nu(G_3), r(G_1,G_3)\},$$

K_n 中就一定出现红色的 G_1，或者出现两个彼此不交的蓝色 G_2 和 G_3.

证明 若 K_n 中没出现红色的 G_1，则由 $n \geqslant r(G_1,G_3)$ 知 K_n 中一定出现蓝色的 G_3. 考虑图 $K_n - V(G_3)$，由 $n \geqslant r(G_1,G_2)+\nu(G_3)$ 知，$n-\nu(G_3)$ 阶完全图 $K_n - V(G_3)$ 中必出现蓝色的 G_2. 因此，K_n 中必出现蓝色的 G_2 和 G_3，且它们彼此不交. □

上面，我们介绍了广义 Ramsey 数，接下来，我们把它作进一步的推广，介绍一般的 Ramsey 定理.

如果我们把 k 种颜色看成是 k 个盒子，把图中的边看成是二元子集，n 阶完全图看成是一个 n 元集合 S，每一次染色都相当于把 S 的一个二元子集放入相应颜色的盒子里，那么可以看到，广义 Ramsey 数 $r(a_1,a_2,\cdots,a_k)$ 就是满足如下条件的最小的正整数：当集合 S 的元素个数 $n > r(a_1,a_2,\cdots,a_k)$ 时，若将 S 的所有二元子集任意分放到 k 个盒子里，则要么有 S 中的 a_1 个元素，它的所有二元子集全在第 1 个盒子里；要么有 S 中的 a_2 个元素，它的所有二元子集全在第 2 个盒子里；…；要么有 S 中的 a_k 个元素，它的所有二元子集全在第 k 个盒子里.

再进一步推广，将 S 的二元子集推广到 S 的 t 元子集，我们就得到了一般的 Remsey 定理.

定理 5.5.4（一般的 Ramsey 定理） 设 $a_1,a_2,\cdots,a_k,t$ 都是正整数，且 $a_i \geqslant t (i=1,2,\cdots,k)$，则必存在最小的正整数 $r(a_1,a_2,\cdots,a_k;t)$，使得当 $m \geqslant r(a_1,a_2,\cdots,a_k;t)$ 时，设 S 是一个集合，且 $|S|=m$，将 S 的所有 t 元子集任意分放到 k 个盒子里，要么有 S 中的 a_1 个元素，它的所有 t 元子集全在第 1 个盒子里；要么有 S 中的 a_2 个元素，它的所有 t 元子集全在第 2 个盒子里；…；要么有 S

中的 a_k 个元素,它的所有 t 元子集全在第 k 个盒子里. □

习题五

1. 14 名棋手赛棋,证明:不管下了多少盘,总有 3 名棋手中任意两人都没赛过,或是有 5 名棋手中任意两名都赛过了.若任何两名棋手至多赛一盘,问只要共赛过多少盘,就出现 4 名棋手他们两两之间都赛过了?

2. 求 $r(2,2,2,3,5)$, $r(3,5,2)$ 和 $r(4,4,2)$.

3. 设 $r(\underbrace{3,\cdots,3}_{n个}) = r_n$.

(1) 证明 $r_n \leqslant n(r_{n-1}-1)+2$;

(2) 利用 $r_2 = 6$,证明 $r_n \leqslant 3n!$;

(3) 证明 $r_3 \leqslant 17$.

4. 不包含 K_4 的 8 阶简单图最多能有多少条边?

5.(1) 设 G 为简单图,且 $\varepsilon > \nu^2/4$,证明 G 中必包含三角形;

(2) 试构造一个简单图 G 满足 $\varepsilon = \nu^2/4$,且不含三角形;

(3) 设 G 为简单图,但不是二部图,且 $\varepsilon > \frac{(\nu-1)^2}{4}+1$,证明 G 中必含三角形;

(4) 构造一个不是二部图的简单图 G 满足 $\varepsilon = \frac{(\nu-1)^2}{4}+1$,且不含三角形.

6. 证明不包含长为 k 的链的 ν 阶图的边数不超过 $\frac{k-1}{2}\nu$.

7. 在九个人的人群中,有一个人认识另外两个人,有两个人每人认识另外四个人,有四个人每人认识另外五个人,余下的两个人每人认识另外六个人.证明:有三个人,他们全都互相认识.

8. 某甲参加一种会议,会上有 6 位朋友,某甲和其中每一人在会上各相遇 12 次,每二人各相遇 6 次,每三人各相遇 4 次,每四人各相遇 3 次,每五人各相遇 2 次,每六人各相遇 1 次,1 人也没遇见的有 5 次,问某甲共参加几次会议?

9. 求从 1 到 500 的整数中被 3 和 5 整除但不被 7 整除的数的个数.

10. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的任一个排列.证明:当 n 为奇数时,$(a_1-1)(a_2-2)\cdots(a_n-n)$ 必为偶数.

11. 一个学校开设三门外语:英语、法语和日语.要求每个学生至少选修一

门外语.已知选修英语、法语、日语的人数分别为 172、132 和 130,同时选修英语和法语的有 48 人,同时选修英语和日语的有 30 人,同时选修法语和日语的有 21 人,同时选修英、法、日三门外语的有 5 人.问该校共有多少个学生?只选英语的有多少学生?恰好选两门外语的有多少学生?

12. 把从 1 到 326 的 326 个整数任意分为 5 个部分,试证其中有一部分至少有一个数是某两个数之和,或是另一个数的两倍.

13. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_{n+1}$ 为 $n+1$ 个正整数,使得 $a_i < n$,且 $\sum_{i=1}^{n+1} a_i = 2n$,证明这 $n+1$ 个整数可分为两组,使得每组中各数之和恰为 n.

14. 任取 11 个整数,求证其中至少有两个数它们的差是 10 的倍数.

15. n 个球放到 m 个盒子中去,$n < \frac{m}{2}(m-1)$,试证其中必有两个盒子有相同的球数.

16. 证明 $r(K_{1,m}, K_{1,n}) = \begin{cases} m+n, & \text{若 } m \text{ 或 } n \text{ 为奇数;} \\ m+n-1, & \text{若 } m \text{ 和 } n \text{ 均为偶数.} \end{cases}$

17. 证明:

(1) $r(P_3, C_n) > n, r(P_3, C_4) = 5$;

(2) $r(C_4, C_4) = 6$;

(3) 用归纳法证明 $r(P_3, P_n) = n + 2 (n \geqslant 3)$.

18. 设 G 和 H 均为简单图,它们的合成图记作 $G[H]$,其顶点集为 $V(G) \times V(H)$,(u, v) 和 (u', v') 相邻,当且仅当 $uu' \in E(G)$ 或 $u = u', vv' \in E(H)$.

(1) 证明:$\alpha(G[H]) = \alpha(G)\alpha(H)$;

(2) 证明:

$r(kl+1, kl+1) - 1 \geqslant (r(k+1, k+1) - 1) \times (r(l+1, l+1) - 1)$;

(3) 证明:对任意自然数 n,$r(2^n+1, 2^n+1) \geqslant 5^n + 1$;

(4) 证明:对任意自然数 n,$r(k^n+1, k^n+1) \geqslant (r(k+1, k+1) - 1)^n + 1$.

第六章　着色与递推关系

图的着色理论内容十分丰富，且具有广泛的应用背景，是图论中的重要篇章．在这一领域中有许许多多猜想尚未得到证明，如著名的四色猜想就是其中之一．图的着色包括边着色、顶点着色以及面着色．为了研究图的顶点着色，人们又提出了色多项式的概念．求图的色多项式是图的着色理论中的一项重要研究内容．

本章我们将介绍边着色、顶点着色、色多项式、递推关系的建立及其求解等方面的基本概念和结论，对于面着色及四色猜想等内容将在第七章中介绍．

6.1　边着色

设 G 是无环图，如果把 G 的每条边都染上颜色，使得相邻的边的颜色都不相同，则这种染法就称为正常边着色(proper edge coloring)，简称边着色(edge coloring)．如果某一边着色所用的颜色数不超过 k，则称该边着色为 k 边着色(k-edge coloring)．如果图 G 存在 k 边着色，则称 G 是 k 边可着色的(k-edge colorable)．在 G 的所有边着色中，所需最少的颜色数目称为 G 的边色数(edge chromatic number)，记为 $\chi'(G)$．规定空图的边色数为0，若 $\chi'(G)=k$，则称 G 是 k 边色的(k-edge chromatic)．

例 6.1.1　设有 n 个商人 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 参加交易会，商人 a_i 与 a_j 之间在会期内有 k_{ij} 宗生意要洽谈，假定每个单位时间内一个商人只能谈一宗生意，试问至少需要多少个单位时间方能谈完全部生意？

用顶点 v_i 表示商人 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$，在 v_i 与 v_j 之间连 k_{ij} 条边，从而得到一个无环图 G．于是上述问题等价于求 G 的边色数。　□

实际上，图 G 的一个边着色相当于 G 的边集的一个分划 $(E_1,E_2,\cdots,E_k)$，其中 E_i 表示染有颜色 i 的边的集合，它是 G 的一个匹配，$i=1,2,\cdots,k$．

定理 6.1.1(Vizing，1964)　设简单图 G 的最大度为 Δ，则有

$$\Delta\leqslant\chi'(G)\leqslant\Delta+1.$$

证明　对于 G 的任意一个边着色，与 G 中度为 Δ 的顶点关联的边就要用 Δ 种颜色，因此 $\chi'(G) \geqslant \Delta$.

对于边数用归纳法证明 $\chi'(G) \leqslant \Delta + 1$. 若 G 是空图，显然 $\chi'(G) \leqslant \Delta + 1$. 下设 $\varepsilon(G) \geqslant 1$，假设对任一具有 $\varepsilon(G) - 1$ 条边的图 G_1 有 $\chi'(G_1) \leqslant \Delta(G_1) + 1$，取 $xy_1 \in E(G)$，于是

$$\chi'(G - xy_1) \leqslant \Delta(G - xy_1) + 1 \leqslant \Delta(G) + 1,$$

因此，可以假设 $G - xy_1$ 已经有了一个 $\Delta + 1$ 边着色，下面通过对 $G - xy_1$ 的边的颜色进行调整得到 G 的 $\Delta + 1$ 边着色.

我们约定：如果与顶点 v 关联的某条边染有颜色 i，则称颜色 i 在 v 上出现，否则称 v 缺少颜色 i.

考虑 $G - xy_1$ 的一个 $\Delta + 1$ 边着色. 因 G 的最大度为 Δ，故 G 的每个顶点至少缺少 $\Delta + 1$ 种颜色中的一种. 设 x 缺少颜色 s，y_1 缺少颜色 t_1，现在令与 x 关联的颜色为 t_1 的那条边是 xy_2，设 y_2 缺少颜色 t_2，再令与 x 关联的颜色为 t_2 的那条边是 xy_3，设 y_3 缺少颜色 t_3，…，继续上面的过程，当选好 xy_n 时，如图 6.1.1 所示，分两种情况讨论.

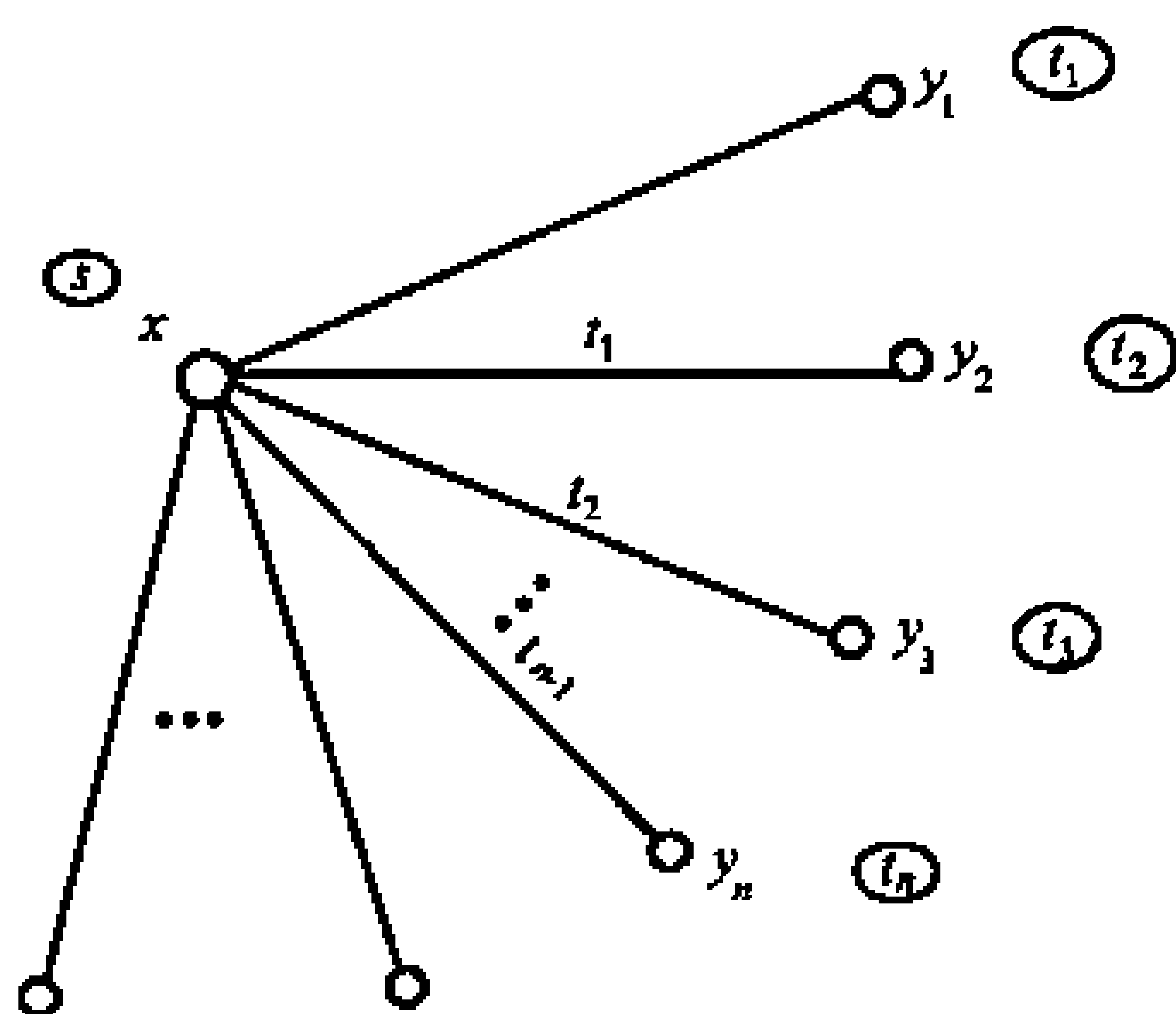


图 6.1.1

(1) 当排列到 $xy_1, xy_2, \cdots, xy_n$ 时，在与 x 关联的边中找不到染有颜色 t_n 的边，即顶点 x 缺少颜色 t_n，这时只要把 xy_1 染 t_1，xy_2 改染 t_2，…，xy_n 改染 t_n，其余各边的颜色均不动，显然，这就是 G 的 $\Delta + 1$ 边着色.

(2) 当排列到 $xy_1, xy_2, \cdots, xy_n$ 时，前面已有某条边 xy_j 染有颜色 t_n，即 $t_n = t_{j-1}$，$j < n$，这时我们把 xy_1 染 t_1，把 $xy_2, \cdots, xy_{j-1}$ 依次改染 $t_2, \cdots, t_{j-1}$，并取消 xy_j 上的颜色，如图 6.1.2 所示.

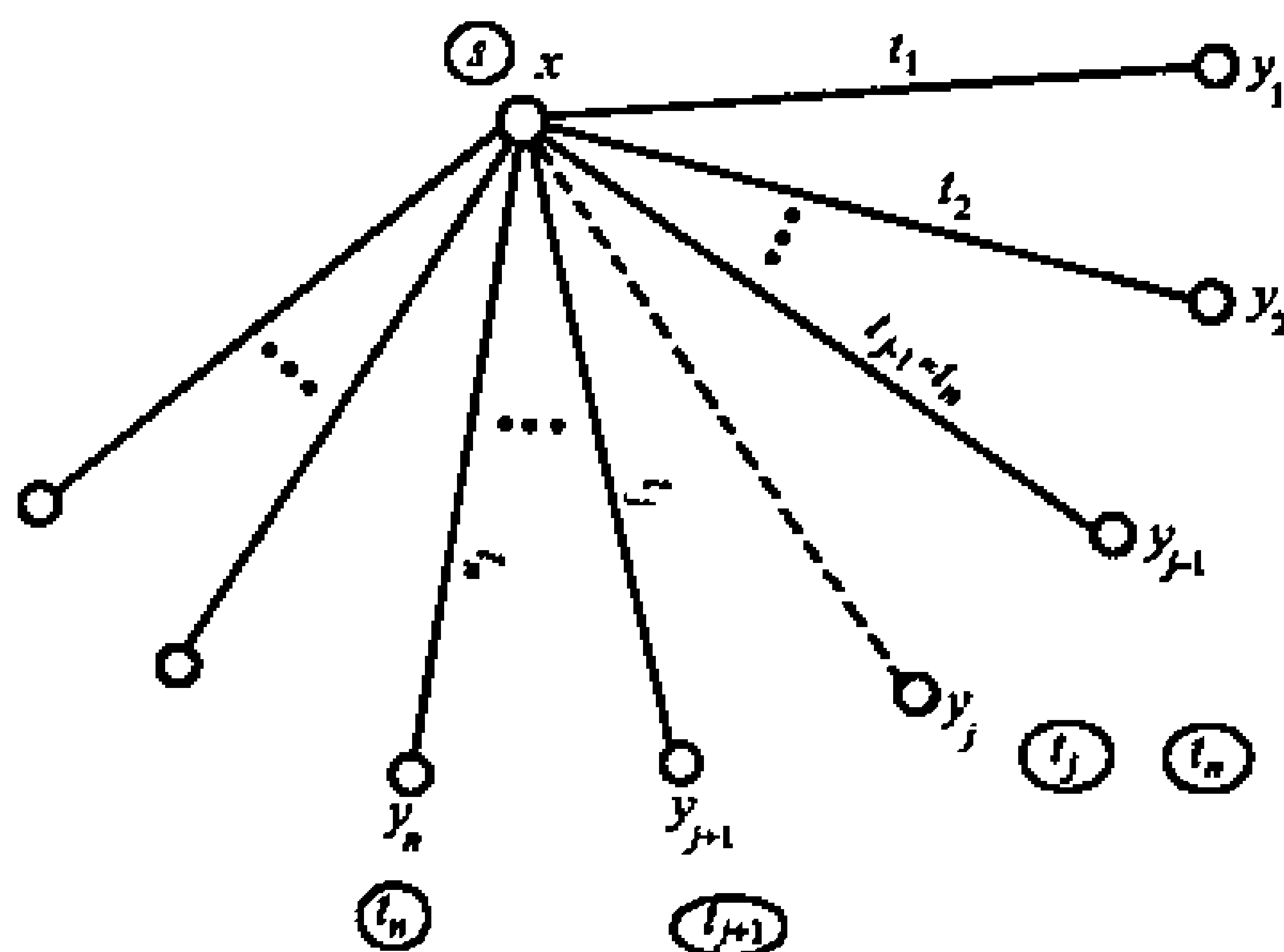


图 6.1.2

现在考虑 G 中染有颜色 s 或 t_n 的边的集合导出的子图 $H = H(s, t_n)$，显然 $\Delta(H) \leqslant 2$，在 H 中，由于 x 缺少 s，而 xy_{j-1} 染有 $t_{j-1} = t_n$，故 $d_H(x) = 1$. 因为取消了 xy_j 的颜色 $t_{j-1} = t_n$，所以 y_j 缺少 t_n，于是，当 s 在 y_j 上出现时，$d_H(y_j) = 1$，否则 y_j 不是 H 中的顶点. 同样，y_n 缺少了 t_n，从而亦有 $d_H(y_n) = 1$，或者 y_n 不是 H 的顶点. 因此，由 $\Delta(H) \leqslant 2$ 知 x, y_j, y_n 不可能在 H 的同一个连通分支中. 以下又分两种情形处理.

(ⅰ) x, y_j 不属于 $H(s, t_n)$ 的同一连通分支. 如果 y_j 是 $H(s, t_n)$ 的顶点，只要把 y_j 所在的 H 的那个连通分支中各条边的颜色 s 和 t_n 互换，y_j 就会缺少 s，这时再把 xy_j 染上 s 即可；如果 y_j 不是 $H(s, t_n)$ 的顶点，这说明 y_j 缺少 s 和 t_n，直接把 xy_j 染上 s，无论怎样都可以得到 G 的 $\Delta + 1$ 边着色.

(ⅱ) x, y_j 属于 $H(s, t_n)$ 的同一连通分支，则 x, y_n 不属于 $H(s, t_n)$ 的同一连通分支. 这时把 xy_j 染 $t_j, xy_{j+1}, \cdots, xy_{n-1}$ 依次改染上 $t_{j+1}, \cdots, t_{n-1}$，并取消 xy_n 上的颜色(如图 6.1.3).

由于上述的颜色变化并不牵涉颜色为 t_n 或 s 的边，因此，这时 G 中由颜色为 s 或 t_n 的边的集合导出的子图仍然是原来的子图 H，于是 x 与 y_n 仍然不在 H 的同一连通分支上，若 y_n 是 H 的顶点，把 y_n 所在的连通分支中的颜色 s 和 t_n 对调，则 y_n 缺少 s，这时 xy_n 染 s；若 y_n 不是 H 的顶点，说明 y_n 缺少 s 和 t_n，直接把 xy_n 染 s 即可. □

实际上，Vizing 证明了更一般的结论：设 G 是无环图，μ 为连接 G 中两个顶点的边的最大数目，则

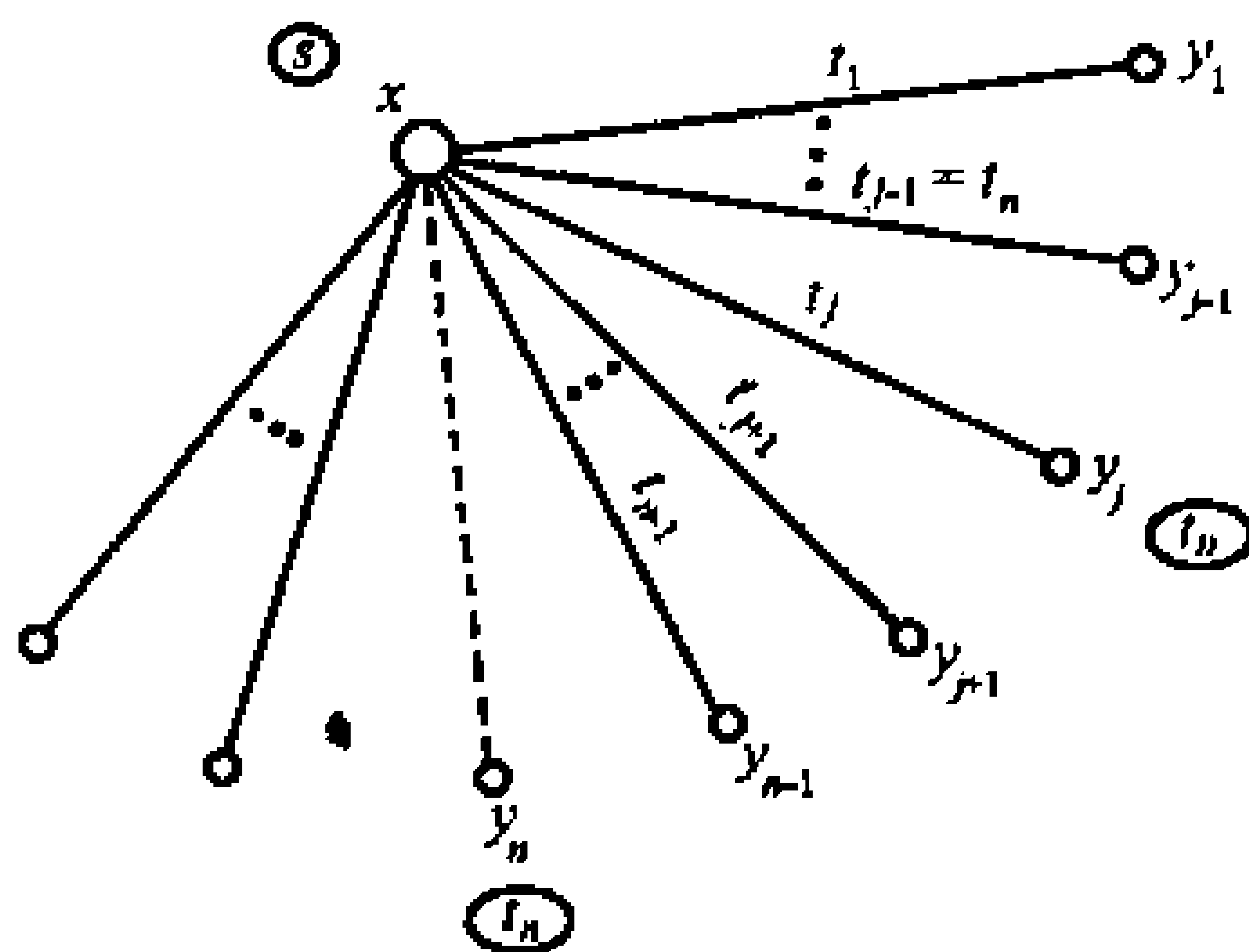


图 6.1.3

$$\Delta \leqslant \chi'(G) \leqslant \Delta + \mu .$$

这个定理是最好可能的，即存在图 G 满足 $\chi'(G) = \Delta + \mu$. 例如，取 G 为 3 阶图，在每对顶点之间连 μ 条边，则 $\Delta = 2\mu$. 由于 G 的 3μ 条边中任意两条边都相邻，因此 $\chi'(G) = 3\mu = \Delta + \mu$.

根据 Vizing 定理，我们可以把简单图分成两类：满足 $\chi'(G) = \Delta$ 的图称为第一类图；满足 $\chi'(G) = \Delta + 1$ 的图称为第二类图. 一个图究竟满足什么条件才是第一类图或第二类图，这是一个尚待解决的难题. 下面我们只讨论几种特殊图.

定理 6.1.2　设 G 是二部图，则 $\chi'(G) = \Delta(G)$.

证明　设 G 是二部图，对 G 的边数进行归纳. 若 $\varepsilon(G) = 0$，则 $\chi'(G) = 0 = \Delta(G)$. 设 $\varepsilon(G) \geqslant 1$，假设对任何边数少于 $\varepsilon(G)$ 的二部图 G_1 都满足 $\chi'(G_1) = \Delta(G_1)$. 任取 $uv \in E(G)$，则 $G - uv$ 有 Δ 边着色，$\Delta = \Delta(G)$. 由于 $d_{G-uv}(u)$ 与 $d_{G-uv}(v)$ 都小于 Δ，因此，在 $G - uv$ 的 Δ 边着色中，u 必缺少某颜色 i，v 必缺少某颜色 j. 如果 v 也缺少颜色 i，或 u 也缺少颜色 j，则只要把 uv 染上 i 或 j 就得到 G 的 Δ 边着色. 所以下设 j 在 u 上出现，i 在 v 上出现. 考虑 $G - uv$ 中颜色为 i 的边与颜色为 j 的边的集合导出的子图 G_{ij}，显然 G_{ij} 的连通分支必为链或偶图，而 u, v 必为它们各自所在连通分支中链的端点. 若 G_{ij} 中存在 (u, v) 链 P，因 $uv \in E(G)$，故 P 的长为奇数，注意到 P 上的边的颜色交替地为 j 和 i，所以 P 上与 v 关联的边的颜色为 j，此与 v 缺少 j 矛盾. 于是 G_{ij} 中不存在 (u, v) 链，即 u, v 属于 G_{ij} 的不同连通分支. 这时只要把 u 所在的连通分支上边的颜色 i 和 j 对调，u 就缺少 j，把 uv 染 j，便得到 G 的 Δ 边着色. □

根据定理 6.1.2，简单二部图是第一类图.

定理 6.1.3　设 G 是简单图，且 $\varepsilon > \Delta\lfloor \nu/2 \rfloor$，则 G 是第二类图.

证明　假设 $\chi'(G) = \Delta$，由于在 G 的任何一个 Δ 边着色中，同一种颜色的

边数最多为$\lfloor \nu/2 \rfloor$，因此把各种颜色的边数相加，得

$$\varepsilon \leqslant \chi'(G)\lfloor \nu/2 \rfloor = \Delta \lfloor \nu/2 \rfloor,$$

此与条件相矛盾. □

由定理6.1.3立即得到下列推论.

推论6.1.4 设H是奇阶k正则简单图，$k \geqslant 2$，而G是由H删去m条边后得到的图，$0 \leqslant m < k/2$，则G是第二类图.

证明 由于$\varepsilon(H) = \nu(H)k/2$，$\nu(H)$为奇数，因此

$$\begin{aligned}\varepsilon(G) = \varepsilon(H) - m &> \frac{1}{2}\nu(H)k - \frac{1}{2}k \\ &= k\lfloor \nu(H)/2 \rfloor \geqslant \Delta(G)\lfloor \nu(G)/2 \rfloor,\end{aligned}$$

所以由定理6.1.3知G是第二类图. □

推论6.1.5 设H是偶阶k正则简单图，$k \geqslant 2$，而G是由剖分H的一条边后得到的图，则G是第二类图.

证明 因为$\varepsilon(H) = \frac{1}{2}\nu(H)k$，$\nu(H)$为偶数，所以

$$\begin{aligned}\varepsilon(G) = \varepsilon(H) + 1 &= \frac{1}{2}\nu(H)k + 1 \\ &= k\lfloor \nu(H)/2 \rfloor + 1 > \Delta(G)\lfloor \nu(G)/2 \rfloor,\end{aligned}$$

于是由定理6.1.3知G是第二类图. □

推论6.1.6 含有割点的正则简单图是第二类图.

证明 设G是含有割点v的k正则简单图，则$k \geqslant 2$，若$\nu(G)$是奇数，则由推论6.1.4知$\chi'(G) = k + 1$. 若$\nu(G)$为偶数，则$G - v$必有奇分支G_1，且由G是正则简单图知，$\Delta(G_1) = k$（若不然，v必与G_1的每个顶点在G中相邻，从而$k > \nu(G_1)$，而G_1中顶点在G中的度必不大于$\nu(G_1)$，矛盾）. 设v与G_1之间的边数为m，则$m < k$，从而

$$\varepsilon(G_1) = \frac{1}{2}(k\,\nu(G_1) - m) > \frac{1}{2}(k\,\nu(G_1) - k) = k\lfloor \nu(G_1)/2 \rfloor,$$

由定理6.1.3知$\chi'(G_1) = \Delta(G_1) + 1 = k + 1$，从而$\chi'(G) \geqslant k + 1$，根据Vizing定理，有$\chi'(G) = k + 1$. □

定理6.1.7 K_{2n}是第一类图，K_{2n+1}是第二类图.

证明 设$V(K_{2n}) = \{v_1, v_2, \cdots, v_{2n}\}$，定义

$$M_i = \{v_i v_{2n}\} \cup \{v_{i-j}v_{i+j} \mid 1 \leqslant j \leqslant n - 1\} \quad (1 \leqslant i \leqslant 2n - 1),$$

其中顶点的下标$(i - j)$和$(i + j)$都是取模$(2n - 1)$的同余. 容易看出，M_i是K_{2n}的完美匹配，且$M_i \cap M_j = \varnothing (i \neq j)$，从而得到$K_{2n}$的一个$(2n - 1)$边着色$(M_1,$

$M_2,\cdots,M_{2n-1}$)，即 $\chi'(K_{2n})\leqslant 2n-1$，故由 Vizing 定理知 $\chi'(K_{2n})=2n-1$.

K_{2n+1} 是奇阶正则简单图，故由推论 6.1.4 知 K_{2n+1} 是第二类图. □

Erdös 和 Wilson 于 1977 年证明了当顶点数充分多时，几乎所有的简单图都是第一类图，即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|c^1(n)|}{|c^1(n)\cup c^2(n)|}=1,$$

其中 $c^k(n)$ 表示所有 n 阶简单图中第 k 类图的全体($k=1,2$).

6.2 顶点着色

设 G 是无环图，若把 G 的每个顶点都染上颜色，并且使 G 的任一对相邻顶点具有不同颜色，这种染法称为正常顶点着色(proper vertex coloring)，简称为 G 的着色(coloring). 若某一着色中所使用的颜色数目不超过 k，则称这个着色为 k 着色(k-coloring). 若图 G 存在 k 着色，则称 G 是 k 可着色的(k-colorable). 使得 G 是 k 可着色的 k 的最小值称为 G 的色数(chromatic numbor)，记为 $\chi(G)$. 若 $\chi(G)=k$，则称 G 是 k 色图(k-chromatic graph).

例 6.2.1　设某学校有 n 门课程可供学生选修，期末要进行考试. 显然每名学生一个时间段只能参加一门课程考试. 问期末考试至少要安排在多少个时间段进行?

用 n 个顶点 $v_1,v_2,\cdots,v_n$ 表示 n 门课程，当且仅当课程 i 和课程 j 被同一名学生选修时，在 v_i 和 v_j 之间连一条边，这样就得到一个 n 阶简单图 G. 上述的考试安排问题相当于求 G 的色数. □

关于顶点着色，我们指出下面几点.

(1) 一个无环图是 k 可着色的，当且仅当它的基础简单图是 k 可着色，因此，只须讨论简单图的着色.

(2) 图 G 的一个 k 着色等价于把 $V(G)$ 分划成 k 个独立集 $V_1,V_2,\cdots,V_k$，以后常用 $(V_1,V_2,\cdots,V_k)$ 表示 G 的 k 着色.

(3) 一个图是 k 可着色的，当且仅当它是 k 部图.

(4) G 是 1 色图，当且仅当 G 为空图.

(5) G 是 k 色图，当且仅当 G 是 k 部图，但不是 $k-1$ 部图($k\geqslant 2$).

在图 6.2.1 中，易知 G 是 3 可着色的，且 G 不是二部图(含奇圈)，故 G 不是 2 可着色的，所以 $\chi(G)=3$.

对于一般图，计算色数是一件非常困难的事情. 下面估计色数的上界.

定理 6.2.1　设简单图 G 的顶点集 $V(G)=\{v_1,v_2,\cdots,v_\nu\}$，且每个 v_j 最多

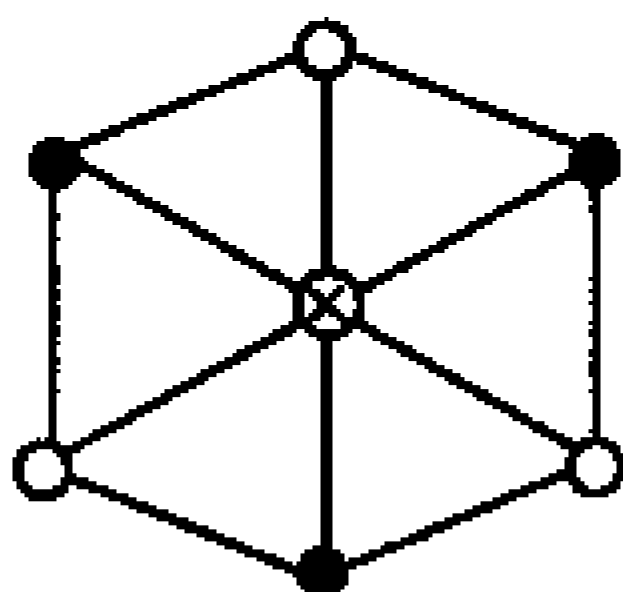


图 6.2.1 3 色图 G

只与 $v_1,v_2,\cdots,v_{j-1}$ 中的 k 个顶点相邻,$2\leqslant j\leqslant \nu$,则有 $\chi(G)\leqslant k+1$.

证明 用①,②,…,ⓝ,…表示一个颜色序列,当 $i\neq j$ 时,ⓘ与ⓙ是不同的.先把 v_1 染①,当 v_2 与 v_1 不相邻时,仍把 v_2 染①,否则,把 v_2 染②.一般地,当已经把顶点 $v_1,v_2,\cdots,v_{j-1}$ 染色,而得到 $G[\{v_1,v_2,\cdots,v_{j-1}\}]$ 的 $k+1$ 着色之后,在使 $G[\{v_1,v_2,\cdots,v_j\}]$ 获得正常着色的前提下,总是用标号最小的颜色来染 v_j,由于 v_j 最多与 $v_1,\cdots,v_{j-1}$ 中的 k 个顶点相邻,因此 $k+1$ 种颜色中必有一种颜色可以染 v_j,从而得到 $G[\{v_1,\cdots,v_j\}]$ 的 $k+1$ 着色,继续下去,最终得到 G 的 $k+1$ 着色,于是 $\chi(G)\leqslant k+1$. □

推论 6.2.2 对任意简单图 G,均有 $\chi(G)\leqslant\Delta(G)+1$.

证明 设 $V(G)=\{v_1,v_2,\cdots,v_\nu\}$,则每个 v_j 最多只与 $v_1,v_2,\cdots,v_{j-1}$ 中的 $\Delta(G)$ 个顶点相邻,$2\leqslant j\leqslant\nu$,于是由定理 6.2.1 知结论成立. □

推论 6.2.3 设 G 是简单图,则 $\chi(G)\leqslant\max\limits_H\delta(H)+1$,其中 H 是取遍 G 的所有由顶点导出的子图.

证明 设 $k=\max\limits_H\delta(H)$,由于 H 能取到 G,因此 $\delta(G)\leqslant k$,从而 G 中有一个顶点 v_ν,使 $d_G(v_\nu)\leqslant k$,令 $H_{\nu-1}=G-v_\nu$,$H_{\nu-1}$ 是 G 的导出子图,因而 $H_{\nu-1}$ 也有一个顶点 $v_{\nu-1}$,使 $d_{H_{\nu-1}}(v_{\nu-1})\leqslant k$,再令 $H_{\nu-2}=G-\{v_\nu,v_{\nu-1}\}$,同样有 $v_{\nu-2}\in V(H_{\nu-2})$,使 $d_{H_{\nu-2}}(v_{\nu-2})\leqslant k$,这样下去,就得到一个顶点序列 $v_1,v_2,\cdots,v_{\nu-1}$,根据该序列的做法可知,序列中每个 v_j 最多与 $v_1,v_2,\cdots,v_{j-1}$ 中 k 个顶点在 G 中相邻,$2\leqslant j\leqslant\nu$,因此,由定理 6.2.1 知 $\chi(G)\leqslant k+1$. □

推论 6.2.4 设 G 是简单连通图,且不是正则图,则有

$$\chi(G)\leqslant\Delta(G).$$

证明 由推论 6.2.3 可知,只须证明 G 的任何导出子图 H 都有 $\delta(H)\leqslant\Delta(G)-1$.若 $H=G$,因 G 不是正则图,故 $\delta(H)\leqslant\Delta(G)-1$.若 H 是 G 的真子图,则由 G 的连通性可知,有 $x\in V(H)$,$y\in V(G)\setminus V(H)$,使 $xy\in E(G)$,从而 $d_H(x)<d_G(x)\leqslant\Delta(G)$,因此 $\delta(H)\leqslant d_H(x)\leqslant\Delta(G)-1$. □

推论 6.2.5　设 G 是连通的正则简单图，且含有 1 顶点割，则

$$\chi(G) \leqslant \Delta(G).$$

证明　设 $\{v\}$ 是 G 的 1 顶点割，G' 为 $G-v$ 的一个连通分支，记 $G_1 = G[V(G') \cup \{v\}]$，$G_2 = G - V(G')$。由于 G 是连通正则简单图，因此，每个 G_i 都是连通简单图，但不是正则图，且 $\Delta(G_i) = \Delta(G)$。于是由推论 6.2.4 知 $\chi(G_i) \leqslant \Delta(G)(i = 1,2)$，分别对 G_1 和 G_2 进行 $\Delta(G)$ 着色，使得 v 在 G_1, G_2 的 $\Delta(G)$ 着色中染相同颜色，从而得到 G 的 $\Delta(G)$ 着色，即 $\chi(G) \leqslant \Delta(G)$。　□

推论 6.2.6　设 G 是连通的 k 正则简单图，$k \geqslant 3$，且 G 有 2 顶点割，则 $\chi(G) \leqslant \Delta(G)$。

证明　设 $\{v_1, v_2\}$ 是 G 的 2 顶点割，G' 是 $G - \{v_1, v_2\}$ 的一个连通分支，令 $G_1 = G[V(G') \cup \{v_1, v_2\}]$，$G_2 = G - V(G')$。若 $v_1v_2 \notin E(G)$，则可以假设 $d_{G_1}(v_1) > 1, d_{G_2}(v_2) > 1$。这是因为，若不然，则由 $k \geqslant 3$ 有以下三种情况：

(1) $d_{G_1}(v_1) = 1, d_{G_2}(v_2) = 1$;

(2) $d_{G_1}(v_1) = 1, d_{G_2}(v_2) > 1$;

(3) $d_{G_1}(v_1) > 1, d_{G_2}(v_2) = 1$.

当(1)发生时，则 $d_{G_2}(v_1) > 1, d_{G_1}(v_2) > 1$，此时只需将 v_1 与 v_2 互换；当(2)发生时，则有 $v_1u_1 \in E(G_1)$，此时 $\{u_1, v_2\}$ 仍是 G 的 2 顶点割，且 $d_{G_1 - v_1}(u_1) > 1$，$d_{G_2 + v_1}(v_2) \geqslant d_{G_2}(v_2) > 1$，从而只要用 u_1 代替 v_1，用 $G_1 - v_1$ 代替 G_1，用 $G_2 + v_1$ 代替 G_2 即可；对于(3)，同(2)类似地处理。对于 $i = 1,2$，令

$$H_i = \begin{cases} G_i + v_1v_2, & v_1v_2 \notin E(G); \\ G_i, & v_1v_2 \in E(G). \end{cases}$$

显然 H_i 不是正则图，但它是连通简单图，从而由推论 6.2.4 知 $\chi(H_i) \leqslant \Delta(G_i) = k$，即 H_i 有 k 着色，使 v_1, v_2 着以不同的颜色($i = 1,2$)。不妨设 v_1 在 H_1 和 H_2 的 k 着色中同染颜色 ①，v_2 在 H_1 和 H_2 的 k 着色中同染颜色 ②，从而得到 G 的 k 着色，即 $\chi(G) \leqslant k$。　□

由推论 6.2.2 可知，简单图的色数至多为 $\Delta + 1$，并且由上述一系列推论可以发现，大多数简单图的色数都不超过 Δ，但是，也确有色数达到 $\Delta + 1$ 的简单图，例如奇圈和完全图。Brooks(1941) 证明了在连通简单图中只有这两类图的色数达到 $\Delta + 1$。

定理 6.2.7(Brooks, 1941)　设 G 是连通简单图，且既不是奇圈也不是完全图，则 $\chi(G) \leqslant \Delta(G)$。

证明 首先,根据推论6.2.4,可以假设 G 是正则图.其次,不妨设 $\Delta(G)\geqslant 3$,因为 $\Delta(G)=0$ 或1时,G 只能是 K_1 或 K_2,此与条件相矛盾;而 $\Delta(G)=2$ 时,G 只能是偶圈或链,即知 $\chi(G)=2\leqslant\Delta(G)$.于是 $\nu(G)\geqslant 5$.根据推论6.2.5和推论6.2.6,还可假定 G 是3连通的.

由于 G 是连通简单图,且不是完全图,因此,由例1.4.1可知,存在 $u,v,w\in V(G)$,使 $uv,vw\in E(G)$,$uw\notin E(G)$,令 $v_1=u$,$v_2=w$,$v_\nu=v$,因 G 是3连通的,故 $G-\{v_1,v_2\}$ 连通.在 $G-\{v_1,v_2\}$ 中取 v_ν 的相邻顶点 $v_{\nu-1}$,设 $v_{\nu-2}$ 是 $G-\{v_1,v_2\}$ 中不属于 $\{v_\nu,v_{\nu-1}\}$ 但与 $\{v_\nu,v_{\nu-1}\}$ 中顶点相邻的顶点.一般地,取 $v_{\nu-i}$ 为 $G-\{v_1,v_2\}$ 中不属于 $\{v_\nu,v_{\nu-1},\cdots,v_{\nu-i+1}\}$ 但与其中的顶点相邻的顶点($1\leqslant i\leqslant\nu-3$),从而得到 G 的一个顶点序列 $v_1,v_2,\cdots,v_{\nu-1},v_\nu$,并且该序列中每个 v_j($1\leqslant j\leqslant\nu-1$)都与排在其后的某个顶点相邻,或者说 v_j 的前面最多有 $\Delta-1$ 个顶点与 v_j 相邻($2\leqslant j\leqslant\nu-1$),采用定理6.2.1的证明方法可知 $G[\{v_1,\cdots,v_{\nu-1}\}]$ 能用颜色①,②,…,Ⓐ进行正常着色,且 v_1 与 v_2 同染①,因为 v_ν 与 v_1,v_2 都相邻,所以 v_ν 的 Δ 个邻点至多染 $\Delta-1$ 种颜色,即知 v_ν 可用颜色②,…,Ⓐ中的某种颜色来染,这样就得到 G 的 Δ 着色. □

关于图的色数,推论6.2.2给出的上界有时与色数的实际值相差甚大,例如非空的二部图是2色图,但是它却可以有任意大的最大度.从这种意义上讲,推论6.2.2比起边色数的 Vizing 定理来是相当弱的.可是另一方面,满足 $\chi'(G)=\Delta(G)+1$ 的简单图 G 可能是哪些图我们并不清楚,但 Brooks 定理却指出:只有两类简单图 G 满足 $\chi(G)=\Delta(G)+1$.

下面再讨论色数的下界.

由于简单图 G 的任何一个着色至少使 G 的每个团中顶点染不同的颜色,因此,对 G 的任何团 S,均有 $\chi(G)\geqslant|S|$,又因为 S 是 G 的团,当且仅当 S 为 $\overline{G}$ 的独立集,所以我们得到色数的一个明显的下界:$\chi(G)\geqslant\alpha(\overline{G})$.

定理6.2.8 设 G 为简单图,则

$$\chi(G)\geqslant\frac{\nu^2(G)}{\nu^2(G)-2\varepsilon(G)}. \tag{6.2.1}$$

并且上式中等号成立,当且仅当 G 是完全 k 部图,且各个部分的顶点数相等.

证明 注意到 $\nu(G)=\nu(G)$,$\varepsilon(\overline{G})=\binom{\nu(G)}{2}-\varepsilon(G)$,从而根据推论5.2.5得

$$\alpha(\overline{G})\geqslant\frac{\nu^2(\overline{G})}{\nu(\overline{G})+2\varepsilon(\overline{G})}=\frac{\nu^2(G)}{\nu^2(G)-2\varepsilon(G)}, \tag{6.2.2}$$

并且上式左端等于右端,当且仅当 $\overline{G}$ 是 k 个点不交的同阶完全图的并,这等价于

G 是完全 k 部图,且各个部分的顶点数相等.因此

$$\chi(G) \geqslant \alpha(\overline{G}) \geqslant \frac{\nu^2(G)}{\nu^2(G) - 2\varepsilon(G)}.$$

若式(6.2.1)中等式成立,则式(6.2.2)左端等于右端,从而 G 是完全 k 部图,且各个部分的顶点数相等.反之,若 G 是完全 k 部图,且各个部分的顶点数相等,则式(6.2.2)中左端等于右端,此时 $\chi(G) = k = \alpha(\overline{G})$,即式(6.2.1)中等号成立. □

下面的定理指出了 $\chi(G)$ 与 $\chi(\overline{G})$ 之间的关系.

定理 6.2.9(Nordhaus, Gaddum, 1956)　设 G 是 ν 阶简单图,则

$$2\sqrt{\nu} \leqslant \chi(G) + \chi(\overline{G}) \leqslant \nu + 1,$$

$$\nu \leqslant \chi(G)\chi(\overline{G}) \leqslant \frac{1}{4}(\nu + 1)^2.$$

证明　设 $(V_1, \cdots, V_{\chi(G)})$ 是 G 的 $\chi(G)$ 着色,则

$$\alpha(\overline{G}) \geqslant \max_i |V_i| \geqslant \frac{\nu}{\chi(G)},$$

即知 $\chi(G) \geqslant \frac{\nu}{\alpha(\overline{G})} \geqslant \frac{\nu}{\chi(\overline{G})}$,这就证明了 $\chi(G)\chi(\overline{G}) \geqslant \nu$.

现在对 ν 用归纳法证明 $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leqslant \nu + 1$.当 $\nu = 1$ 时,不等式显然成立.假设对任何阶数小于 ν 的简单图,不等式都成立.设 G 为 ν 阶简单图, $\nu \geqslant 2$,任取 $v \in V(G)$,令 $H = G - v$,则 $\overline{H} = \overline{G} - v$,易知 $\chi(G) \leqslant \chi(H) + 1$, $\chi(\overline{G}) \leqslant \chi(\overline{H}) + 1$.若 $\chi(G) < \chi(H) + 1$ 或 $\chi(\overline{G}) < \chi(\overline{H}) + 1$,则由归纳假设, $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leqslant \chi(H) + \chi(\overline{H}) + 1 \leqslant \nu + 1$.因此下设 $\chi(G) = \chi(H) + 1$, $\chi(\overline{G}) = \chi(\overline{H}) + 1$,则在 H 的 $\chi(H)$ 着色中, $N_G(v)$ 中顶点用到 $\chi(H)$ 种颜色,故 $d_G(v) \geqslant \chi(H)$.类似地可证: $d_{\overline{G}}(v) \geqslant \chi(\overline{H})$,从而

$$\chi(H) + \chi(\overline{H}) \leqslant d_G(v) + d_{\overline{G}}(v) = \nu - 1,$$

于是

$$\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leqslant \nu + 1.$$

又因为 $\sqrt{\chi(G)\chi(\overline{G})} \leqslant \frac{\chi(G) + \chi(\overline{G})}{2}$,所以

$$\chi(G) + \chi(\overline{G}) \geqslant 2\sqrt{\nu};$$

$$\chi(G)\chi(\overline{G}) \leqslant \left(\frac{\chi(G) + \chi(\overline{G})}{2}\right)^2 \leqslant \frac{1}{4}(\nu + 1)^2. \qquad \square$$

6.3 色多项式

设 G 是顶点标号图，用 k 种颜色对G的顶点进行着色，问有多少种不同的 k 着色?所谓两个 k 着色不同是指至少有一个顶点在两个k 着色中颜色不同. 用 $\pi(G,k)$ 表示图 G 中所有不同的k 着色的数目. Birkhoff 于 1912 年首先提出并研究 $\pi(G,k)$.

不难知道，$\pi(G,k)>0$，当且仅当 G 是k 可着色的. 因此，$\chi(G)$ 就是使 $\pi(G,k)>0$ 的最小自然数 k.

一般说来，求 $\pi(G,k)$ 是十分困难的. 下面计算两类特殊图的不同的 k 着色的数目.

因为空图 $\overline{K}_\nu$ 的每一个顶点都可以染以k 种颜色中的任何一种，所以

$$\pi(\overline{K}_\nu,k)=k^\nu.$$

对于完全图 K_ν，染 K_ν 的第一个顶点v_1 时有 k 种颜色可供选择，染第二个顶点 v_2 时只有 $k-1$ 种颜色可供选择，依次类推可得

$$\pi(K_\nu,k)=k(k-1)\cdots(k-\nu+1).$$

对于一般的简单图 G，有下面的递推公式.

定理 6.3.1　对于简单图 G 的任意一条边e，有

$$\pi(G,k)=\pi(G-e,k)-\pi(G\cdot e,k).$$

证明　设 $e=uv$，$G-uv$ 的全体k 着色可以分为两类：一类使 u 和v 的颜色相同，另一类使 u 和v 的颜色不同. 对于前一类 k 着色，用 u,v 的颜色染$G\cdot e$ 中新顶点，就对应着 $G\cdot e$ 的k 着色，显然这种对应是一一对应. 同样，后一类k 着色与 G 的全体k 着色之间存在一一对应. 因此

$$\pi(G-e,k)=\pi(G\cdot e,k)+\pi(G,k).$$ □

利用这个递推公式，我们得到下面的一个重要定理.

定理 6.3.2　设简单图 G 有ν 个顶点、ε 条边和ω 个连通分支，则

$$\pi(G,k)=\sum_{i=0}^{\nu-\omega}(-1)^i a_i k^{\nu-i},\tag{6.3.1}$$

其中 $a_0=1,a_1=\varepsilon,a_i>0(2\leqslant i\leqslant\nu-\omega)$.

证明　对ε 进行归纳. 当 $\varepsilon=0$ 时，则 $G=\overline{K}_\nu$，$\pi(G,k)=k^\nu$，式(6.3.1)成立.

假设对所有边数小于ε 的简单图，式(6.3.1)成立. 下面对ν 个顶点、ε 条边、ω 个连通分支的简单图G 证明式(6.3.1)成立. $\varepsilon\geqslant 1$，任取 $uv\in E(G)$，并令 G_1

$= G - uv$, G_2 为 $G \cdot uv$ 的基础简单图，则 $\pi(G_2,k) = \pi(G \cdot uv, k)$，由于 $\nu(G_1) = \nu$, $\varepsilon(G_1) = \varepsilon - 1$, $\omega(G_1) = \omega$ 或 $\omega + 1$，根据归纳假设，有

$$\pi(G_1,k) = k^{\nu} - (\varepsilon - 1)k^{\nu-1} + \sum_{i=2}^{\nu-\omega}(-1)^i b_i k^{\nu-i},$$

这里 $b_i > 0\ (2 \leqslant i \leqslant \nu - \omega - 1)$，并且当 $\omega(G_1) = \omega$ 时，$b_{\nu-\omega} > 0$，当 $\omega(G_1) = \omega + 1$ 时，$b_{\nu-\omega} = 0$，同样，因为 $\nu(G_2) = \nu - 1$, $\varepsilon(G_2) < \varepsilon$, $\omega(G_2) = \omega$，所以

$$\begin{aligned}\pi(G_2,k) &= k^{\nu-1} + \sum_{i=1}^{\nu-1-\omega}(-1)^i c_i k^{\nu-1-i} \\ &= k^{\nu-1} - \sum_{j=2}^{\nu-\omega}(-1)^j c_{j-1} k^{\nu-j} \quad (j = i + 1) \\ &= k^{\nu-1} - \sum_{j=2}^{\nu-\omega}(-1)^j \bar{c}_j k^{\nu-j} \quad (\bar{c}_j = c_{j-1})\end{aligned}$$

这里 $\bar{c}_j > 0\ (2 \leqslant j \leqslant \nu - \omega)$，于是由定理 6.3.1 有

$$\begin{aligned}\pi(G \cdot k) &= \pi(G_1,k) - \pi(G_2,k) \\ &= k^{\nu} - \varepsilon k^{\nu-1} + \sum_{i=2}^{\nu-\omega}(-1)^i (b_i + \bar{c}_i) k^{\nu-i} \\ &= k^{\nu} - \varepsilon k^{\nu-1} + \sum_{i=2}^{\nu-\omega}(-1)^i a_i k^{\nu-i},\end{aligned}$$

其中 $a_i = b_i + \bar{c}_i > 0\ (2 \leqslant i \leqslant \nu - \omega)$. □

因为图 G 连通，当且仅当 $\omega(G) = 1$，所以由定理 6.3.2 立即得到：

推论 6.3.3　简单图 G 连通，当且仅当 $\pi(G,k)$ 中 $a_{\nu-1} > 0$. □

根据定理6.3.2，$\pi(G,k)$ 是 k 的多项式函数，因此通常称 $\pi(G,k)$ 为简单图 G 的色多项式(chromatic polynomial).

定理 6.3.1 提供了递推地计算色多项式的方法.

(1) 若简单图 G 不是空图，则可反复利用公式

$$\pi(G,k) = \pi(G - e, k) - \pi(G \cdot e, k),$$

把 $\pi(G,k)$ 表示为若干个空图的色多项式的代数和.

(2) 若简单图 G 不是完全图，则可反复利用公式

$$\pi(G,k) = \pi(G + e, k) + \pi((G + e) \cdot e, k),$$

把 $\pi(G,k)$ 表示成若干个完全图的色多项式的和.

方法(1) 和方法(2) 分别称为减边法和加边法. 减边法通常适合于边数较少的图，而加边法则能更有效地应用于边数较多的图.

虽然迄今为止，我们还不知道什么样的多项式是色多项式，但是对于树有下面的定理.

定理6.3.4 简单图 G 是树,当且仅当 $\pi(G,k)=k(k-1)^{\nu-1}$.

证明

($\Leftarrow$) 若 $\pi(G,k)=k(k-1)^{\nu-1}$,则 $\pi(G,k)$ 中 $a_{\nu-1}=1$,从而由推论6.3.3知 G 连通,并且在 $\pi(G,k)$ 中,$a_1=\nu-1$,即由定理6.3.2知 $\varepsilon=\nu-1$,所以 G 是树.

($\Rightarrow$) 对 ν 进行归纳.当 $\nu=1$ 时,$G=K_1$;当 $\nu=2$ 时,$G=K_2$.于是,当 $\nu\leqslant 2$ 时,总有 $\pi(G,k)=k(k-1)^{\nu-1}$.假设 G 是树,且 $2\leqslant\nu\leqslant n-1$ 时,$\pi(G,k)=k(k-1)^{\nu-1}$.设树 G 的阶 $\nu(G)=n\geqslant 3$,且 v 为 G 的悬挂点.考虑树 $G'=G-v$,由归纳假设,$\pi(G',k)=k(k-1)^{n-2}$,对于 G' 的每个 k 着色,为了得到 G 的 k 着色,与 v 相邻的那个顶点的颜色不能用来染 v,即染 v 有 $k-1$ 种颜色可选供选择,故

$$\pi(G,k)=\pi(G',k)(k-1)=k(k-1)^{n-2}. \qquad \Box$$

定理6.3.5(洪渊,1984) 简单图 G 是连通二部图,当且仅当 $\pi(G,k)$ 中的 $a_{\nu-1}$ 为奇数.

证明 若已知图 G 连通,则 $\varepsilon\geqslant\nu-1$.若已知 $\pi(G,k)$ 中的 $a_{\nu-1}$ 为奇数,则 $a_{\nu-1}>0$,从而由推论6.3.3知 G 连通,也有 $\varepsilon\geqslant\nu-1$.

对 ε 进行归纳.当 $\varepsilon=\nu-1$ 时,因 G 连通,故 G 是树,从而由定理6.3.4知 $a_{\nu-1}=1$ 为奇数;反之,若 $a_{\nu-1}$ 为奇数,则 G 连通,即知 G 是树,于是 G 为连通二部图.

假设对边数小于 m 的任何简单图,定理成立.往证当 G 是 m 条边的简单图时定理也成立.

先证必要性.设 G 是连通二部图,且 $m>\nu-1$,则 G 不是树.令 e 是 G 中某个圈上的一条边.设 $\pi(G-e,k)$ 和 $\pi(G\cdot e,k)$ 中1次项 k 的系数分别为 $(-1)^{\nu-1}b_{\nu-1}$ 和 $(-1)^{\nu-2}c_{\nu-2}$,因为 $G-e$ 是连通二部图,$G\cdot e$ 是连通图但不是二部图,所以由归纳假设,$b_{\nu-1}$ 是奇数,$c_{\nu-2}$ 是偶数,从而

$$\pi(G,k)=\pi(G-e,k)-\pi(G\cdot e,k)$$

中1次项 k 的系数为

$$(-1)^{\nu-1}a_{\nu-1}=(-1)^{\nu-1}b_{\nu-1}-(-1)^{\nu-2}c_{\nu-2}=(-1)^{\nu-1}(b_{\nu-1}+c_{\nu-2}),$$

即 $a_{\nu-1}=b_{\nu-1}+c_{\nu-2}$ 为奇数.

再证充分性.设 $\pi(G,k)$ 中 $a_{\nu-1}$ 为奇数,则由推论6.3.3知 G 连通.下证 G 是二部图.若不然,G 中含有奇圈 C,设 $e\in E(C)$.易见,$G-e$ 含有奇圈,当且仅当 $G\cdot e$ 含有奇圈,即 $G-e$ 是二部图,当且仅当 $G\cdot e$ 是二部图.又因 G 连通,故 $G-e$ 和 $G\cdot e$ 都连通.于是由归纳假设知,$\pi(G\cdot e,k)$ 的1次项系数中 $b_{\nu(G-e)-1}$ 和

$\pi(G\cdot e,k)$ 的 1 次项系数中 $c_{\nu(G\cdot e)-1}$ 有相同的奇偶性，从而 $\pi(G,k)$ 的 1 次项系数中 $a_{\nu-1}=b_{\nu(G-e)-1}+c_{\nu(G\cdot e)-1}$ 为偶数，此与假设条件相矛盾．□

6.4　递推关系的建立

色多项式 $\pi(G,k)$ 是十分难求的，求 $\pi(G,k)$ 也就是求用 k 种不同颜色，给顶点标号图 G 的顶点着色的不同方案数．对于一些特殊的图类，我们可以通过建立递推关系来求 $\pi(G,k)$．所谓递推关系(recurrence)是指对于给定的一个数列 $H(0),H(1),\cdots,H(n),\cdots$，若存在整数 n_0，使得当 $n\geqslant n_0$ 时，可以用等号(或大于号，小于号)将 $H(n)$ 与其前面的某些项 $H(i)(0\leqslant i<n)$ 联系起来，这样的式子就叫做递推关系．例如

$$\begin{cases}H(n)=H(n-1)+1,n\geqslant 1,\\ H(0)=0\end{cases}$$

就是关于数列 $H(n)$ 的递推关系．由 $H(0)$ 就可以计算出 $H(1)=1$，由 $H(1)$ 又可以计算出 $H(2)=2$，如此下去可以计算出 $H(n)=n$．不难看出，递推关系连同其初始条件一起就惟一地确定了一个数列．

对于圈、轮图等，它们的色多项式所满足的递推关系是比较简单易求的，确实可以用递推关系的有关理论来求出它们的色多项式．为简便直观起见，我们记 $C(n,k)$ 为用 k 种颜色给顶点标号的 n 圈 C_n 的顶点着色的不同方案数，即 $C(n,k)=\pi(C_n,k)$．类似地，记 $W(n,k)$ 为用 k 种颜色给有 n 个辐条的轮图 W_n 的顶点着色的不同方案数，即 $W(n,k)=\pi(W_n,k)$．下面我们就分别建立 $C(n,k)$ 和 $W(n,k)$ 所满足的递推关系．

对于 n 圈 C_n，任取其上一边 e，则有 $\pi(C_n,k)=\pi(C_n-e,k)-\pi(C_n\cdot e,k)$．注意到 C_n-e 为 n 阶树，由定理 6.3.4 知，$\pi(C_n-e,k)=k(k-1)^{n-1}$，而 $C_n\cdot e$ 为一个 $(n-1)$ 圈，则有

$$\begin{cases}C(n,k)=k(k-1)^{n-1}-C(n-1,k),n>2,\\ C(2,k)=k(k-1).\end{cases}\tag{6.4.1}$$

另外，我们还可以从另一角度出发，建立 $C(n,k)$ 所满足的递推关系．如图 6.4.1 所示，n 圈 C_n．分两种情形：

(ⅰ) 若 v_1 与 v_{n-1} 着同种颜色，此时 v_n 有 $k-1$ 种着色方案，而 v_1 与 v_{n-1} 着同色，故可以看成是同一个顶点，于是 $v_1,v_2,\cdots,v_{n-1}$ 的着色方案数为 $C(n-2,k)$，故此时 n 圈 C_n 的着色方案数为 $(k-1)C(n-2,k)$．

(ⅱ) 若 v_1 与 v_{n-1} 着以不同颜色，此时 v_n 将有 $k-2$ 种着色方案，而 v_1 与 v_{n-1}

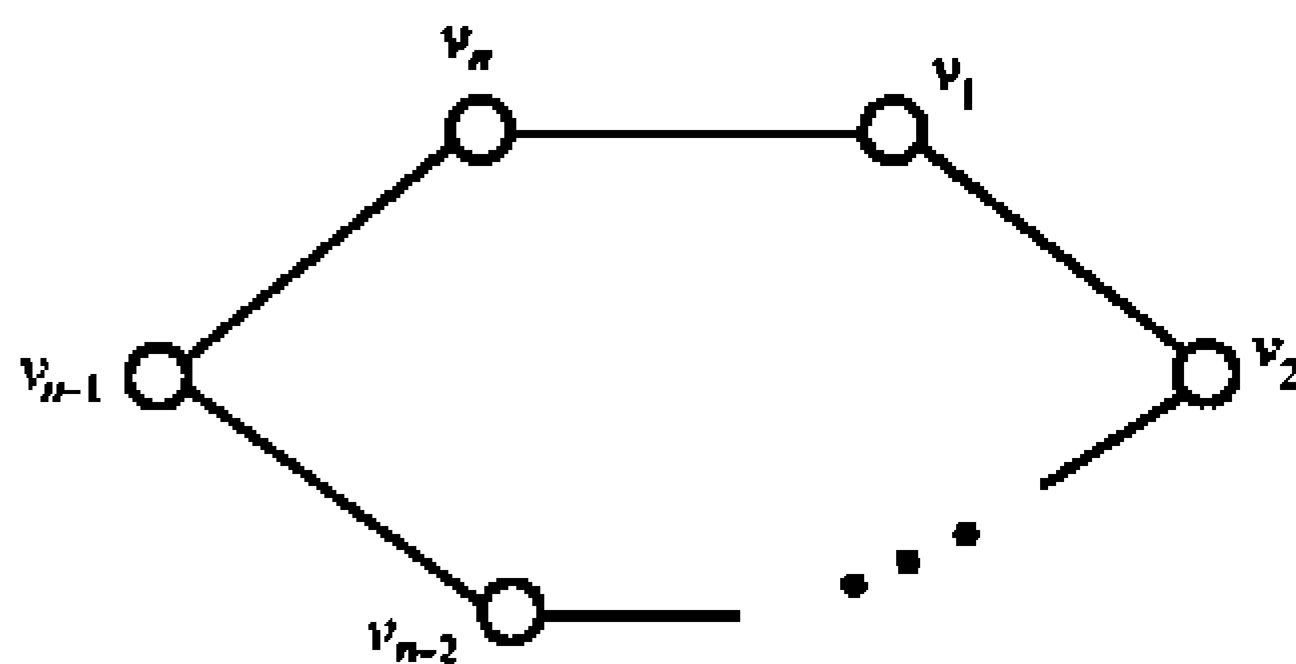


图6.4.1 n 圈C_n

着以不同颜色，故可以把它们看成是相邻顶点，于是 $v_1,v_2,\cdots,v_{n-1}$ 可以看成是一个$(n-1)$圈，它们的着色方案数为 $C(n-1,k)$，故此时 n 圈C_n 的着色方案数为 $C(n-1,k)(k-2)$.

综合以上两种情况有

$$\begin{cases} C(n,k)=(k-1)C(n-2,k)+(k-2)C(n-1,k), n\geqslant 4, \\ C(2,k)=k(k-1), \\ C(3,k)=k(k-1)(k-2). \end{cases} \tag{6.4.2}$$

类似地，对于轮图 W_n，如图6.4.2所示，用 k 种不同的颜色为其$n+1$个顶点着色. 同样分两种情况讨论.

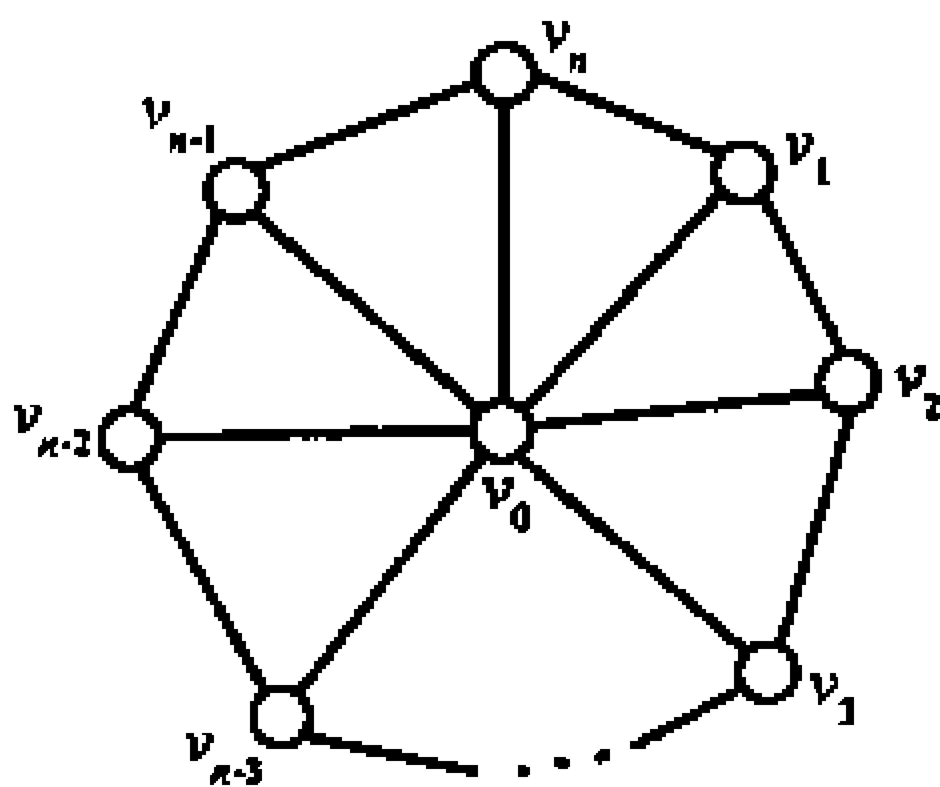


图6.4.2 轮图 W_n

(ⅰ) 若 v_1 与 v_{n-1} 着同种颜色，则此时顶点 v_n 有$k-2$种着色方案，而 v_1 与 v_{n-1} 着同种颜色，故可以把它们看成是一个顶点，从而此时 $v_0,v_1,v_2,\cdots,v_{n-1}$ 的着色方案数与有 $n-2$ 个辐条的轮图 W_{n-2} 的 k 着色数相同，即为 $W(n-2,k)$. 于是，在这种情况下，轮图 W_n 的k 着色数为$(k-2)W(n-2,k)$.

(ⅱ) 若 v_1 与 v_{n-1} 着不同的颜色，则此时顶点 v_n 有$k-3$种着色方案，而其他的顶点 $v_0,v_1,v_2,\cdots,v_{n-1}$ 的着色方案数则与有 $n-1$ 个辐条的轮图 W_{n-2} 的 k 着色数相同，即为 $W(n-1,k)$，故在这种情况下，W_n 的k 着色数为$(k-3)W(n-1,k)$.

综合以上两种情形，我们有

$$\begin{cases} W(n,k) = (k-2)W(n-2,k) + (k-3)W(n-1,k), n > 4, \\ W(3,k) = k(k-1)(k-2)(k-3), \\ W(4,k) = k(k-1)(k-2)^2(k-3). \end{cases} \tag{6.4.3}$$

还有其他一些着色的计数问题，我们同样可以建立相应的递推关系．例如，顶点标号的 n 阶空图的 k 着色数为 k^n．但若去掉顶点标号，同时要求在用 k 种颜色给 G 的顶点着色时，每一种颜色都必须用到，问这时有多少种不同的着色方案．易见，当 $k=1$ 或 n 时，都只有惟一的 1 种着色方案．且当 $k>n$ 时，满足条件的着色方案数为 0．记 $S(n,k)$ 为满足条件的不同的着色方案，当 $1<k<n$ 时，任取 G 中的一个顶点，分两种情形讨论．

（ⅰ）若图 G 中的其他 $n-1$ 个顶点的颜色都与该顶点的颜色不同，则此时其余的 $n-1$ 个顶点必然染遍了剩下的 $k-1$ 种颜色，故这时的着色方案数为 $S(n-1,k-1)$．

（ⅱ）若该顶点的颜色与其他某个顶点的颜色相同，则此时其余的 $n-1$ 个顶点必然染遍了全部的 k 种颜色，而该顶点则可以染这 k 种颜色中的任何一种，故这时的着色方案为 $kS(n-1,k)$．

这样，我们得到

$$\begin{cases} S(n,k) = S(n-1,k-1) + kS(n-1,k), 1 < k < n, \\ S(n,1) = 1 = S(n,n). \end{cases} \tag{6.4.4}$$

以上，我们建立了一些图的着色问题所满足的递推关系．实际上，许多直接求解十分困难的组合计数问题，却可以很容易写出其递推关系．在 2.6 节，我们讨论了有序二元树的计数问题，其求解过程比较复杂，但要建立其递推关系是比较容易的．接下来，我们将举一些典型的例子，说明如何建立递推关系．一般说来，建立递推关系没有一个一般的方法，只能通过一些例子学习建立递推关系的技巧．

例 6.4.1　问顶点无标号的 n 阶有序二元树有多少个？

解　设有 $T(n)$ 个．显然 $T(0)=1$．对于全体顶点无标号的 n 阶有序二元树，我们按照根顶点的左子树中所含顶点的数目，可以将其分为 n 类．这 n 类分别为左子树中含 0 个顶点，含 1 个顶点，…，含 $n-1$ 个顶点．当然，若左子树中含 i 个顶点，则右子树中就必有 $n-1-i$ 个顶点．容易知道左子树中有 i 个顶点的 n 阶有序二元树共有 $T(i)\cdot T(n-1-i)$ 个．于是有

$$\begin{cases} T(n) = \sum_{i=0}^{n-1} T(i)T(n-1-i), n > 0, \\ T(0) = 1. \end{cases} \tag{6.4.5}$$

□

例 6.4.2(棋盘完备覆盖) 一个 $m \times n$ 的棋盘,它有 m 行和 n 列,共 mn 个方格.假定有一批外形完全一样的骨牌,每块骨牌恰好覆盖棋盘上两个邻接的方格.若用一些骨牌覆盖棋盘,使得棋盘上的所有方格都被骨牌覆盖,并且没有两块骨牌交叠,就称这种覆盖是棋盘的一个完备覆盖.显然,一个 $m \times n$ 棋盘有完备覆盖的充要条件是 m 和 n 中至少有一个是偶数.问一个 $2 \times n$ 棋盘的完备覆盖总共有多少个?所谓两个完备覆盖是不同的,是指至少有两个邻接的方格,这两个覆盖盖住这两个方格的方式是不同的.

解 设 $f(n)$ 表示 $2 \times n$ 棋盘的完备覆盖的总个数,显然有 $f(1) = 1, f(2) = 2$.下面考虑 $n \geqslant 3$ 的情形,设棋盘如图 6.4.3 所示.

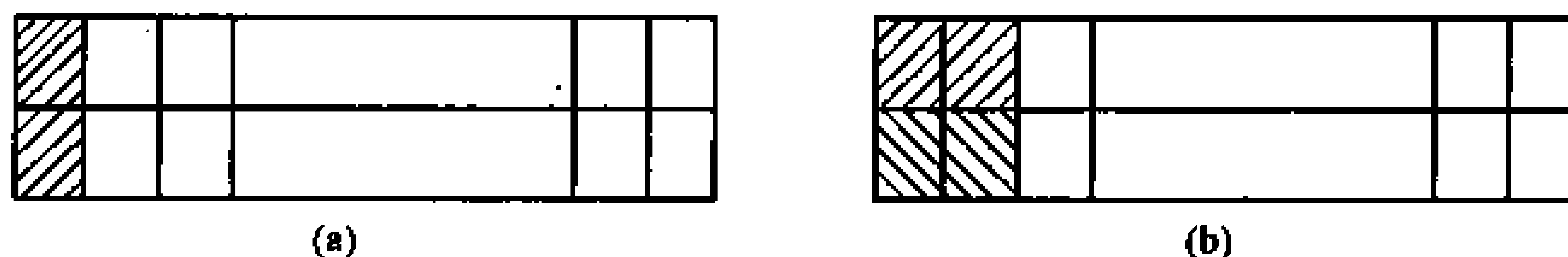


图 6.4.3 $2 \times n$ 棋盘的完备覆盖

在 $2 \times n$ 棋盘的所有完备覆盖中,考察左上角的方格,分两类.

第一类,在 $2 \times n$ 棋盘的完备覆盖中,将左上角的方格和左下角方格同时用一块骨牌盖住.如图 6.4.3(a) 所示.此时剩下 $2 \times (n-1)$ 个方格,构成一个 $2 \times (n-1)$ 棋盘,因此,这一类中共有 $f(n-1)$ 个完备覆盖.

第二类,在 $2 \times n$ 棋盘的完备覆盖中,将左上角的方格和与其右邻的方格同时用一块骨牌盖住,如图 6.4.3(b).这时左下角的方格只能和与其右邻的方格同时被另一块骨牌盖住.这样就剩下了 $2 \times (n-2)$ 个方格,构成一个 $2 \times (n-2)$ 棋盘.因此,这一类中共有 $f(n-2)$ 个完备覆盖.

从而知 f_n 满足如下递推关系

$$\begin{cases} f(n) = f(n-1) + f(n-2), n \geqslant 3, \\ f(1) = 1, f(2) = 2. \end{cases} \tag{6.4.6}$$

□

例 6.4.3(Hanoi 塔) 设有 n 个半径各不相同的圆盘,把这 n 个圆盘套在柱子 A 上,使半径小的在上面,半径大的在下面,如图 6.4.4 所示.如果每次只允许移动一个圆盘到柱 B 或柱 C 上,且不允许把大圆盘放在小圆盘上面.那么把这 n

个圆盘全部移动到柱 C 上，使半径大的在下面，半径小的在上面，问应怎样移动？至少要移动多少次？

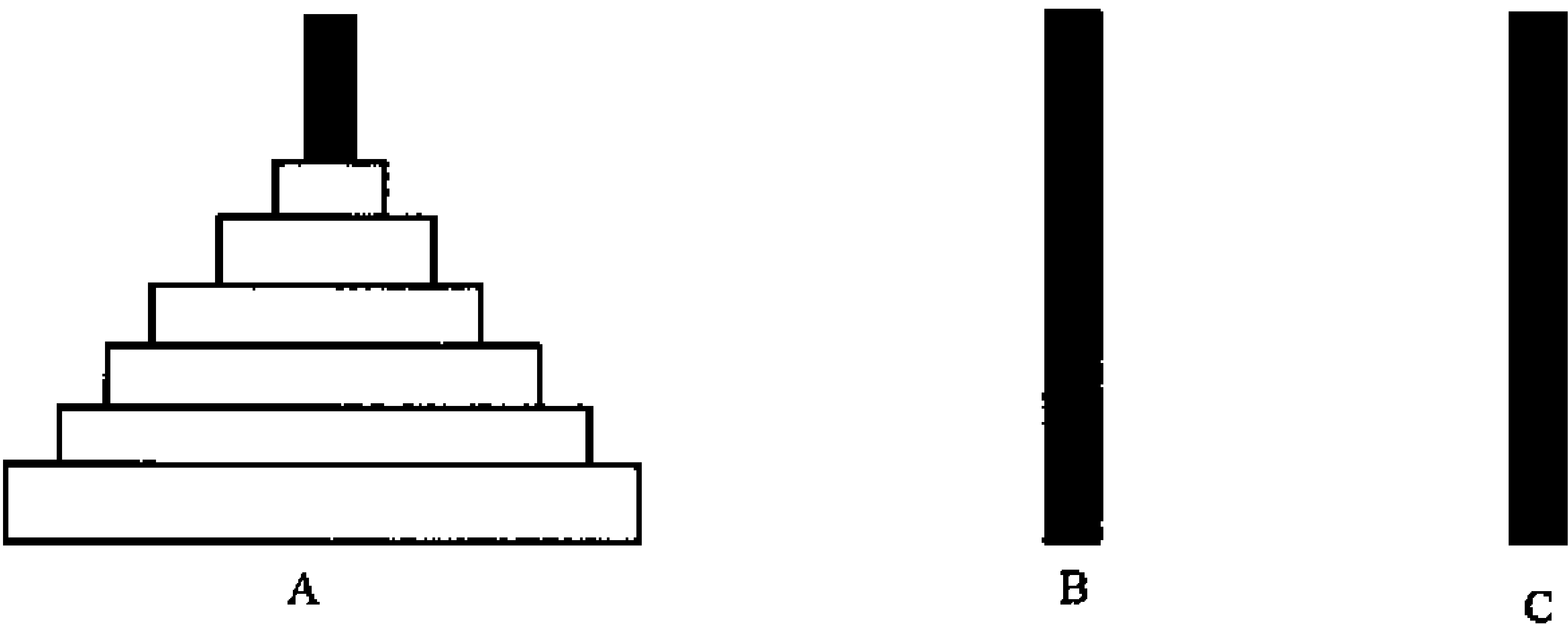


图 6.4.4　Hanoi 塔问题

解　设 n 个圆盘至少要移动 $a(n)$ 次．当 $n = 2$ 时，只须先把小圆盘移到柱 B 上，把大圆盘移到柱 C 上，再把柱 B 上的小圆盘移到柱 C 上即可，这样共移动了 3 次，即 $a(2) = 3$.

对于 $n > 2$ 个圆盘的问题，我们要把 A 柱上的半径最大的圆盘移到 C 柱上，就必须先把上面的 $n-1$ 个圆盘先移到柱 B 上，这样就需要移动 $a(n-1)$ 次，然后把柱 A 上的最后一个圆盘移到柱 C 上，最后再把柱 B 上的 $n-1$ 个圆盘移到柱 C 上，又需移动 $a(n-1)$ 次，于是，我们有

$$\begin{cases} a(n) = 2a(n-1)+1, n > 2, \\ a(2) = 3. \end{cases} \tag{6.4.7}$$

□

例6.4.4　一个凸 n 边形，如图 6.4.5，它的诸对角线将 n 边形的内部分为许多区域，如果这些对角线中任何三条在多边形内部无公共交点，问这 n 边形的对角线将其内部分为多少个区域？

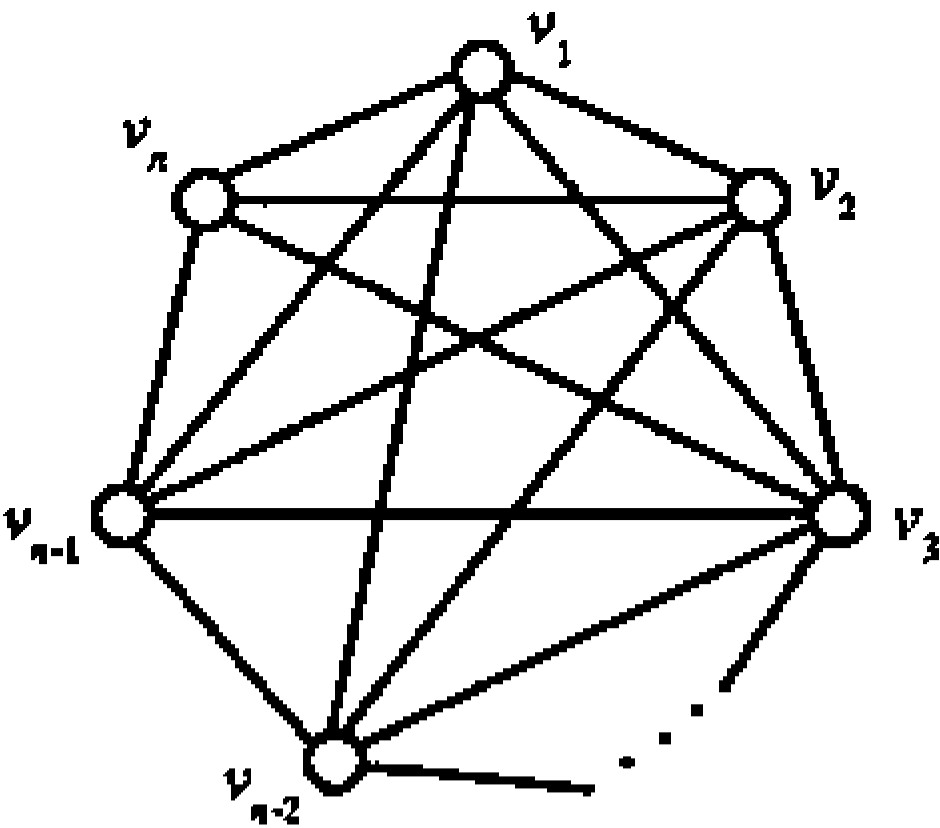


图 6.4.5　凸 n 边形

解 设有 $b(n)$ 个区域，显然 $b(3)=1, b(4)=4$.

考虑将凸 $n-1$ 边形增加一个顶点变为 n 边形时，区域增加的个数.

设 $v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n$ 为凸n 边形的顶点，则由 $v_1, v_2, \cdots, v_{n-1}$ 构成的凸 $n-1$ 边形，其对角线将其内部划分的区域数为 $b(n-1)$. 对于每一个顶点 v_k，对角线 v_nv_k 必与$(k-1)(n-k-1)$ 条对角线相交，从而有$(k-1)(n-k-1)$ 个交点. 对角线 v_nv_k 被这些交点分为$(k-1)(n-k-1)+1$ 段，每一段都将一个区域划分为两个. 同时，注意到凸 n 边形$v_1v_2\cdots v_n$ 比凸$n-1$ 边形 $v_1v_2\cdots v_{n-1}$ 新增加了一个区域 $v_1v_nv_{n-1}$. 所以有

$$\begin{cases} b(n) = b(n-1) + 1 + \sum_{k=2}^{n-2}[(k-1)(n-k-1)+1], n > 3, \\ b(3) = 1. \end{cases} \tag{6.4.8}$$

□

通过以上几个例子，我们看到，对于一些复杂的组合计数问题，可以建立它们的递推关系. 但仅仅建立递推关系，问题还远远没有得到解决，更重要的是递推关系的求解. 尽管，许多递推关系的求解是十分困难的，但至少递推关系是求一些最初值的一个很有效的方法.

6.5 线性递推关系的求解

我们从 6.4 节已经看到，许多组合计数问题的求解往往归结为寻找一个数列的通项表达式，使该数列满足我们所建立的递推关系. 本节，我们就来讨论递推关系的求解问题.

设 k 是任意给定的正整数，若数列 $H(0), H(1), \cdots, H(n), \cdots$ 的相邻 $k+1$ 项间满足关系

$$H(n) = c_1(n)H(n-1) + c_2(n)H(n-2) + \cdots + c_k(n)H(n-k) + g(n), \tag{6.5.1}$$

其中 $n \geqslant k$，则称该关系为数列$\{H(n)\}$ 的 k 阶线性递推关系(linear recurrence relation of order k). 若 $c_1(n), c_2(n), \cdots, c_k(n)$ 都是常数，则称之为 k 阶常系数线性递推关系(linear recurrence relation with constant coefficients of order k). 如果 $g(n)=0$，则称之为齐次的(homogeneous). 若 $c_1(n), c_2(n), \cdots, c_k(n)$ 均为常数，且 $g(n)=0$，则称递推关系式(6.5.1) 为 k 阶常系数线性齐次递推关系(linear homogenous recurrence relations with constant coefficients of order k). 称满

足递推关系式(6.5.1)的数列为该递推关系的解.

6.5.1 常系数线性齐次递推关系的求解

常系数线性齐次递推关系的一般形式为

$$H(n)=c_1H(n-1)+c_2H(n-2)+\cdots+c_kH(n-k),n\geqslant k,c_k\neq 0. \tag{6.5.2}$$

方程 $x^k-c_1x^{k-1}-c_2x^{k-2}-\cdots-c_k=0$,称为递推关系式(6.5.2)的特征方程(characteristic equation).该方程的 k 个根(可能有重根)$q_1,q_2,\cdots,q_k$ 称为递推关系式(6.5.2)的特征根(characteristic roots),其中 q_i 是复数$(1\leqslant i\leqslant k)$.

不难验证:对于任意常数 $b_1,b_2,\cdots,b_k$,$b_1q_1^n+b_2q_2^n+\cdots+b_kq_k^n$ 都是递推关系式(6.5.2)的解.如果对递推关系式(6.5.2)的每个解 $h(n)$ 都可以选择一组数 $c_1',c_2',\cdots,c_k'$,使得

$$h(n)=c_1'q_1^n+c_2'q_2^n+\cdots+c_k'q_k^n$$

成立,则称 $b_1q_1^n+b_2q_2^n+\cdots+b_kq_k^n$ 是递推关系式(6.5.2)的通解(general solution),其中 $b_1,b_2,\cdots,b_k$ 为任意常数.

定理6.5.1　设 $q_1,q_2,\cdots,q_k$ 是递推关系式(6.5.2)的 k 个互不相同的特征根,则

$$b_1q_1^n+b_2q_2^n+\cdots+b_kq_k^n$$

是递推关系式(6.5.2)的通解.

证明　设 $h(n)$ 是递推关系式(6.5.2)的任意一个解,则 $h(n)$ 由 k 个初值 $h(0)=a_0,h(1)=a_1,\cdots,h(k-1)=a_{k-1}$ 惟一地确定,所以得到一个具有 k 个未知量 $b_1,b_2,\cdots,b_k$ 的线性方程组

$$\begin{cases}b_1+b_2+\cdots+b_k=a_0,\\ b_1q_1+b_2q_2+\cdots+b_kq_k=a_1,\\ \cdots\\ b_1q_1^{k-1}+b_2q_2^{k-1}+\cdots+b_kq_k^{k-1}=a_{k-1}.\end{cases} \tag{6.5.3}$$

方程组(6.5.3)的系数行列式为

$$\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\ q_1&q_2&\cdots&q_k\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ q_1^{k-1}&q_2^{k-1}&\cdots&q_k^{k-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant k}(q_j-q_i).$$

这是著名的 Vandermonde 行列式,因为 $q_1,q_2,\cdots,q_k$ 互不相等,所以该行列式不

为零,方程组(6.5.3)有惟一解 $b_1', b_2', \cdots, b_k'$,从而

$$h(n) = b_1'q_1^n + b_2'q_2^n + \cdots + b_k'q_k^n,$$

这说明 $b_1q_1^n + b_2q_2^n + \cdots + b_kq_k^n$ 是递推关系式(6.5.2)的通解. □

定理 6.5.1 给出了求 k 阶常系数线性齐次递推关系的通解的方法,但是当 $q_1, q_2, \cdots, q_k$ 中有重根时,这种方法就不适用了.换句话说,$b_1q_1^n + b_2q_2^n + \cdots + b_kq_k^n$ 就不是原递推关系的通解了.例如,对于递推关系

$$H(n) = 4H(n-1) - 4H(n-2),$$

它的特征方程为 $x^2 - 4x + 4 = 0$,特征根 $x_1 = x_2 = 2$,由定理 6.5.1 知 2^n 是它的解,但 b_12^n 并不是它的通解,可以验证 $n2^n$ 也是该递推关系的解,显然 $n2^n$ 与 2^n 是线性无关的.

对于有重特征根的 k 阶常系数线性齐次递推关系,我们有如下定理.

定理 6.5.2 设 $q_1, q_2, \cdots, q_t$ 是递推关系式(6.5.2)的全部不同特征根,其重数分别为 $r_1, r_2, \cdots, r_t$,显然 $r_1 + r_2 + \cdots + r_t = k$,那么递推关系式(6.5.2)的通解为

$$H(n) = H_1(n) + H_2(n) + \cdots + H_t(n),$$

其中 $H_i(n) = (b_{i1} + nb_{i2} + \cdots + n^{r_i-1}b_{ir_i})q_i^n (1 \leqslant i \leqslant t)$.

证明 设 q 是递推关系式(6.5.2)的 m 重特征根,我们首先证明 $q^n, nq^n, \cdots, n^{m-1}q^n$ 均是递推关系式(6.5.2)的解.

对 m 用归纳法.当 $m = 1$ 时,由定理 6.5.1 知结论成立.

当 $m = 2$ 时,即 q 是特征方程 $p(x) = x^k - c_1x^{k-1} - c_2x^{k-2} - \cdots - c_k = 0$ 的二重根.令 $p_n(x) = x^{n-k}p(x)$,从而 q 是 $p_n(x)$ 的二重根,由 q 是 $p_n(x)$ 的根知 q^n 是递推关系式(6.5.2)的解.由 q 是 $p_n(x)$ 的二重根知 q 是 $p_n'(x)$ 的单根,而

$$\begin{aligned} p_n'(x) = {} & nx^{n-1} - c_1 \cdot (n-1)x^{n-2} \\ & - c_2 \cdot (n-2)x^{n-3} - \cdots - c_k \cdot (n-k)x^{n-k-1}, \end{aligned}$$

显然 q 还是

$$\begin{aligned} xp_n'(x) = {} & nx^n - c_1 \cdot (n-1)x^{n-1} \\ & - c_2 \cdot (n-2)x^{n-2} - \cdots - c_k \cdot (n-k)x^{n-k} \end{aligned}$$

的单根,这表明

$$nq^n = c_1 \cdot (n-1)q^{n-1} + c_2 \cdot (n-2)q^{n-2} + \cdots + c_k \cdot (n-k)q^{n-k},$$

从而有 q^n, nq^n 都是递推关系(6.5.2)的解,结论成立.

假设当 $m = l$ 时,结论成立.则当 $m = l + 1$ 时,我们同样令

$$p_n(x) = x^{n-k}p(x) = x^n - c_1x^{n-1} - c_2x^{n-2} - \cdots - c_kx^{n-k},$$

记 $xp_n'(x)=u_1(x)$，则 q 是 $u_1(x)$ 的 l 重根．再记 $xu_1'(x)=u_2(x)$，则 q 是 $u_2(x)$ 的 $l-1$ 重根，如此下去，最后记 $xu_{l-1}'(x)=u_l(x)$，则 q 是 $u_l(x)$ 的单根．从而由 q 分别是 $p_n(x),u_1(x),u_2(x),\cdots,u_l(x)$ 的根，相应地知 $q^n,nq^n,\cdots,n^lq^n$ 是递推关系式(6.5.2)的解，从而当 $m=l+1$ 时，结论成立．

由定理6.5.1及上述证明，我们知 $H_i(n)(1\leqslant i\leqslant t)$ 都是递推关系式(6.5.2)的解．类似于定理6.5.1中的证明，为了证明 $H(n)=H_1(n)+\cdots+H_t(n)$ 是递推关系式(6.5.2)的通解，只须证明由 $H(0),H(1),\cdots,H(k-1)$ 组成的关于 b_{ij} 的线性方程组的系数行列式非零即可，易知

$$\begin{cases}H(0)=b_{11}+b_{21}+\cdots+b_{t1}\\ H(1)=(b_{11}+b_{12}+\cdots+b_{1r_1})q_1+(b_{21}+b_{22}+\cdots+b_{2r_2})q_2\\ \qquad\qquad+\cdots+(b_{t1}+b_{t2}+\cdots+b_{tr_t})q_t,\\ H(2)=(b_{11}+2b_{12}+\cdots+2^{r_1-1}b_{1r_1})q_1^2+(b_{21}+2b_{22}+\cdots+2^{r_2-1}b_{2r_2})q_2^2\\ \qquad\qquad+\cdots+(b_{t1}+2b_{t2}+\cdots+2^{r_t-1}b_{tr_t})q_t^2,\\ \qquad\qquad\vdots\\ H(k-1)=(b_{11}+(k-1)b_{12}+\cdots+(k-1)^{r_1-1}b_{1r_1})q_1^{k-1}+(b_{21}+(k-1)b_{22}\\ \qquad\qquad+\cdots+(k-1)^{r_2-1}b_{2r_2})q_2^{k-1}+\cdots+(b_{t1}+(k-1)b_{t2}\\ \qquad\qquad+\cdots+(k-1)^{r_t-1}b_{tr_t})q_t^{k-1}.\end{cases}$$

从而容易验证该方程组的系数行列式非零． □

定理 6.5.3 简单图 G 是 n 圈 $C_n(n\geqslant 3)$，当且仅当

$$\pi(G,k)=(k-1)^n+(-1)^n(k-1).$$

证明

(⇒) n 圈 C_n 的色多项式 $C(n,k)$ 满足递推关系式(6.4.2)，它的特征方程为 $x^2-(k-2)x-(k-1)=0$，两个特征根为 $x_1=k-1,x_2=-1$，故它的通解为

$$C(n,k)=b_1(k-1)^n+b_2(-1)^n.$$

代入初值 $C(2,k)=k(k-1),C(3,k)=k(k-1)(k-2)$，得

$$\begin{cases}b_1(k-1)^2+b_2(-1)^2=k(k-1),\\ b_1(k-1)^3+b_2(-1)^3=k(k-1)(k-2).\end{cases}$$

解此方程组得

$$\begin{cases}b_1=1,\\ b_2=k-1.\end{cases}$$

于是 n 圈 C_n 的色多项式为

$$C(n,k)=(k-1)^n+(-1)^n(k-1).$$

(⇐) 用归纳法.当 $n=3$ 时,则图 G 的色多项式为

$$\pi(G,k)=(k-1)^3+(-1)^3(k-1)=k(k-1)(k-2)=k^3-3k^2+2k,$$

由定理6.3.2知 $\varepsilon=3,\omega=1$,于是 G 为3圈.假设当 $n\leqslant l-1$ 时,结论成立,则当 $n=l(\geqslant 4)$ 时,

$$\begin{aligned}\pi(G,k)&=(k-1)^l+(-1)^l(k-1)\\&=k^l-\binom{l}{1}k^{l-1}+\cdots+(-1)^{l-2}\binom{l}{l-2}k^2+(-1)^l(1-l)k,\end{aligned}$$

由定理6.3.2知,$\varepsilon(G)=l,\omega(G)=1$,于是 G 中必有惟一圈 C,任取一边 $e\in E(C)$,则 $G-e$ 为树,$\pi(G-e,k)=k(k-1)^{l-1}$,进而由 $\pi(G,k)=\pi(G-e,k)-\pi(G\cdot e,k)$ 知

$$\begin{aligned}\pi(G\cdot e,k)&=\pi(G-e,k)-\pi(G,k)\\&=k(k-1)^{l-1}-[(k-1)^l+(-1)^l(k-1)]\\&=(k-1)^{l-1}+(-1)^{l-1}(k-1)\end{aligned}$$

由归纳假设知图 $G\cdot e$ 为$(l-1)$ 圈 C_{l-1},再由 $G-e$ 为树知G 必为l 圈C_l.

□

例6.5.1 求解例6.4.2中的递推关系式(6.4.6).

解 递推关系式(6.4.6)的特征方程为 $x^2-x-1=0$,特征根为

$$x_1=\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}),\quad x_2=\frac{1}{2}(1-\sqrt{5}),$$

通解

$$f(n)=b_1x_1^n+b_2x_2^n.$$

代入初值 $f(1)=1,f(2)=2$ 得

$$\begin{cases}b_1x_1^2+b_2x_2^2=2,\\ b_1x_1+b_2x_2=1.\end{cases}$$

解得 $b_1=\frac{1}{10}(5+\sqrt{5}),b_2=\frac{1}{10}(5-\sqrt{5})$,所以

$$f(n)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}.$$

□

例6.5.1中的数列$f(n)$便是著名的Fibonacci数列,在Fibonacci数列1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,377,… 中,每一个数都是整数,且是它前面两个数的和.由于它在算法分析和优化理论中起着重要作用,又具有很奇特的数学性质,美国从1963年开始出版了专门对这个数列进行研究的季刊 Fibonacci Quarterly.这个著名的数列来源于1202年由意大利著名数学家 Fibonacci 提出的

一个有趣的兔子问题.设某人于1月1日买回1对刚出生的小兔,放在四面都围着的地方饲养.假定1对小兔经过一个月,就可以长成1对有繁殖能力的大兔,而1对大兔经过一个月就可以生出1对小兔.另外,假定所有的兔子都不会死去,则n月1日就总共有$f(n-1)$对兔子(令$f(0)=1$).17世纪初,Kepler在研究植物生长过程中的树叶和花朵的排列问题时,发现了同样的数列.19世纪,法国数学家Lucas在研究数论时,发现素数的分布也与这个数列有关.为了纪念最先发现这个数列的数学家,Lucas把它命名为"Fibonacci数".

6.5.2 常系数线性非齐次递推关系的求解

k阶常系数线性非齐次递推关系的一般形式为

$$H(n)=c_1H(n-1)+c_2H(n-2)+\cdots+c_kH(n-k)+g(n),n\geqslant k,c_k\neq 0, \tag{6.5.4}$$

其中$c_1,c_2,\cdots,c_k$为常数,$g(n)\neq 0$.递推关系式(6.5.4)对应的齐次递推关系为

$$H(n)=c_1H(n-1)+c_2H(n-2)+\cdots+c_kH(n-k). \tag{6.5.5}$$

定理6.5.4 k阶常系数线性非齐次递推关系式(6.5.4)的通解是递推关系式(6.5.4)的特解加上其相应的齐次递推关系式(6.5.5)的通解.

证明 设$H_0(n)$是递推关系式(6.5.4)的特解,$H_1(n)$是递推关系式(6.5.5)的通解,则

$$\begin{aligned}H_0(n)+H_1(n)&=[c_1H_0(n-1)+\cdots+c_kH_0(n-k)+g(n)]\\&\quad+[c_1H_1(n-1)+\cdots+c_kH_1(n-k)]\\&=c_1(H_0(n-1)+H_1(n-1))+\cdots\\&\quad+c_k(H_0(n-k)+H_1(n-k))+g(n),\end{aligned}$$

即$H_0(n)+H_1(n)$是递推关系式(6.5.4)的解.

反之,对递推关系式(6.5.4)的任意一个解$H(n)$,可以验证$H(n)-H_0(n)$是递推关系式(6.5.5)的一个解,从而$H(n)$可以表示成$H_0(n)$与递推关系式(6.5.5)的一个解的和. □

由定理6.5.4,求解常系数线性非齐次递推关系的关键,在于求其特解$H_0(n)$,遗憾的是对于一般的$g(n)$,k阶常系数线性非齐次递推关系式(6.5.4)的特解没有普遍的解法,最常用的方法是根据$g(n)$的形式来估计特解的形式,然后代入式(6.5.4)中确定估计特解中各参数的值.表6.5.1中给出了几种特殊的$g(n)$的特解$H_0(n)$.

表 6.5.1 几个特殊的常系数非齐次递推关系的特解

$g(n)$	特征多项式 $p(x)$	特解 $H_0(n)$ 的一般形式
β^n	$p(\beta)\neq 0$	$\alpha\beta^n$
	β 是 $p(x)=0$ 的 m 重根	$\alpha n^m\beta^n$
n^s	$p(1)\neq 0$	$b_s n^s + b_{s-1}n^{s-1} + \cdots + b_1 n + b_0$
	1 是 $p(x)=0$ 的 m 重根	$n^m(b_s n^s + b_{s-1}n^{s-1} + \cdots + b_1 n + b_0)$
$n^s\beta^n$	$p(\beta)\neq 0$	$(b_s n^s + b_{s-1}n^{s-1} + \cdots + b_1 n + b_0)\beta^n$
	β 是 $p(x)=0$ 的 m 重根	$n^m(b_s n^s + b_{s-1}n^{s-1} + \cdots + b_1 n + b_0)\beta^n$

例 6.5.2 求解例 6.4.4 中递推关系式(6.4.8).

解 对于递推关系式(6.4.8),有

$$1+\sum_{k=2}^{n-2}[(k-1)(n-k-1)+1]=\frac{1}{6}n^3-n^2+\frac{17}{6}n-3.$$

相应的齐次递推关系 $b(n)=b(n-1)$ 的特征方程 $p(x)=x-1=0$,1 是 $p(x)=0$ 的 1 重根,故设其特解为

$$n(b_0+b_1n+b_2n^2+b_3n^3).$$

且相应的齐次递推关系的通解为 b_4.

将特解 $n(b_0+b_1n+b_2n^2+b_3n^3)$ 代入原递推关系得

$$\begin{aligned}n(b_0+b_1n+b_2n^2+b_3n^3)=(n-1)[&b_0+b_1(n-1)\\&+b_2(n-1)^2+b_3(n-1)^3]\\&+\frac{1}{6}n^3-n^2+\frac{17}{6}n-3.\end{aligned}$$

合并同类项并比较等式两端 n^i 的系数得

$$\begin{cases}-b_0+b_1-b_2+b_3-3=0,\\ b_0-2b_1+3b_2-4b_3+\dfrac{17}{6}=b_0,\\ b_1-3b_2+6b_3-1=b_1,\\ b_2-4b_3+\dfrac{1}{6}=b_2.\end{cases}$$

由此解得

$$\begin{cases} b_0 = -\dfrac{7}{4}, \\ b_1 = \dfrac{23}{24}, \\ b_2 = -\dfrac{1}{4}, \\ b_3 = \dfrac{1}{24}. \end{cases}$$

因此,它的一个特解为 $n\left(-\frac{7}{4}+\frac{23}{24}n-\frac{1}{4}n^2+\frac{1}{24}n^3\right)$. 所以原递推关系的通解为

$$b(n) = n\left(-\frac{7}{4}+\frac{23}{24}n-\frac{1}{4}n+\frac{1}{24}n^3\right)+b_4.$$

由初始条件 $b(3)=1$,得 $b_4=1$.从而有

$$b(n) = 1-\frac{7}{4}n+\frac{23}{24}n^2-\frac{1}{4}n^3+\frac{1}{24}n^4.$$

□

此外,迭代法是解一阶线性递推关系的重要方法,也有一些高阶的递推关系,通过变量代换,化为一阶线性关系,再用迭代法求解.

例 6.5.3　用迭代法求例 6.4.3 中递推关系式(6.4.7).

解　由递推关系式(6.4.7) 得

$$\begin{aligned} a(n) &= 2a(n-1)+1, \\ 2a(n-1) &= 2^2a(n-2)+2, \\ 2^2a(n-2) &= 2^3a(n-3)+2^2, \\ &\vdots \\ 2^{n-3}a(3) &= 2^{n-2}a(2)+2^{n-3}, \\ a^{n-2}a(2) &= 3\cdot 2^{n-2} = 2^{n-2}+2^{n-1}, \end{aligned}$$

将上面诸式相加,则得

$$a(n) = \sum_{i=0}^{n-1}2^i = 2^n-1.$$

□

6.6　用生成函数求解递推关系

通过求解特征方程来解递推关系,首先我们就要求出特征方程的所有解,当特征方程的阶数较高时,要求出其所有解实际上是十分困难的. 因此,这种方法

有很大的局限性.本节将介绍用生成函数法来求解递推关系,它避免了求解特征方程,并且这一方法也可以用来求解某些非线性的递推关系.

设$\{a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots\}$为一数列,由$\{a_n\}$生成的幂级数

$$A(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots,$$

$A(x)$称为数列$\{a_n\}$的生成函数(generating fanction),并记为$G\{a_n\}$.例如,

$$G\{1\} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x};$$

$$G\{a^n\} = 1 + ax + a^2x^2 + \cdots + a^nx^n + \cdots = \frac{1}{1-ax};$$

$$\begin{aligned} G\{n\} &= x + 2x^2 + \cdots + nx^n + \cdots \\ &= x(1 + 2x + \cdots + nx^{n-1} + \cdots) \\ &= x(1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots)' \\ &= x\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{x}{(1-x)^2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G\{n(n+1)\} &= 2x + 2\cdot 3x^2 + \cdots + n(n+1)x^n + \cdots \\ &= [x\cdot(x + 2x^2 + \cdots + nx^n + \cdots)]' \\ &= \frac{2x}{(1-x)^3}; \end{aligned}$$

$$G\{n^2\} = x + 2^2x + \cdots + n^2x^n + \cdots = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}.$$

应当指出的是,生成函数是形式幂级数,并不涉及收敛性.

设m为一确定的正整数,数列$\{a_n\}$的通项为$a_n = \binom{m}{n}$,则$\{a_n\}$的生成函数

$$\begin{aligned} A(x) &= \binom{m}{0} + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \cdots + \binom{m}{m}x^m \\ &= (1+x)^m. \end{aligned} \tag{6.6.1}$$

若求$\sum_{n=0}^{m}\binom{m}{n}$,则可在式(6.6.1)中令$x = 1$,有

$$\sum_{n=0}^{m}\binom{m}{n} = \binom{m}{0} + \binom{m}{1} + \cdots + \binom{m}{m} = (1+1)^m = 2^m.$$

由此可见,通过研究幂级数$A(x)$,可导出数列$\{a_n\}$的构造和性质.

例 6.6.1 已知数列$\{a_n\}$的生成函数为$A(x) = e^x$,求数列$\{a_n\}$.

解 由 Taylor 公式知

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots,$$

于是 $a_n=\frac{1}{n!}$,即 $\{a_n\}=\{\frac{1}{n!}\}$. □

用生成函数求解递推关系,就是先求出 $f(n)$ 的生成函数 $A(x)=\sum_{n=0}^{\infty}f(n)x^n$,再通过 $A(x)$ 来求出 $f(n)$,其具体步骤如下:

(1) 令 $A(x)=\sum_{n=0}^{\infty}f(n)x^n$;

(2) 将关于 $f(n)$ 的递推关系转化为关于 $A(x)$ 的方程式;

(3) 解出 $A(x)$,将 $A(x)$ 展开成 x 的幂级数,x^n 的系数即是 $f(n)$.

例 6.6.2　利用生成函数求解递推关系

$$\begin{cases}f(n)=4f(n-2),\\ f(0)=0,f(1)=1.\end{cases}$$

解　令 $A(x)=\sum_{n=0}^{\infty}f(n)x^n$,则有

$$\begin{aligned}A(x)-f(0)-f(1)x&=\sum_{n=2}^{\infty}f(n)x^n\\&=\sum_{n=2}^{\infty}[4f(n-2)x^n]\\&=4x^2\sum_{n=0}^{\infty}f(n)x^n=4x^2\cdot A(x).\end{aligned}$$

将 $f(0)=0,f(1)=1$ 代入并整理得

$$\begin{aligned}A(x)&=\frac{x}{1-4x^2}\\&=\frac{1}{4}(\frac{1}{1-2x}-\frac{1}{1+2x})\\&=\frac{1}{4}[\sum_{n=0}^{\infty}(2^n-(-2)^n)x^n]\\&=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{4}(1-(-1)^n\cdot 2^n)x^n,\end{aligned}$$

所以

$$f(n)=\begin{cases}0, & n\text{ 为偶数},\\ 2^{n-1}, & n\text{ 为奇数}.\end{cases}$$

□

利用生成函数,不仅可以求解 k 阶常系数线性齐次递推关系,同样也可以求解其他类型的递推关系.

例 6.6.3　求解线性非齐次递推关系

$$\begin{cases}f(n)=f(n-1)+n(n+1),\\ f(0)=0.\end{cases}$$

解 令 $A(x)=\sum_{n=0}^{\infty}f(n)x^n$，则有

$$\begin{aligned}A(x)-f(0)&=\sum_{n=1}^{\infty}f(n)x^n\\&=\sum_{n=1}^{\infty}(f(n-1)+n(n+1))x^n\\&=\sum_{n=0}^{\infty}f(n)x^{n+1}+G\{n(n+1)\}\\&=x\cdot A(x)+\frac{2x}{(1-x)^3}.\end{aligned}$$

将 $f(0)=0$ 代入并整理得

$$\begin{aligned}A(x)&=\frac{2x}{(1-x)^4}\\&=2x\cdot(1-x)^{-4}\\&=2x\cdot(1+(-4)\cdot(-x)+\frac{1}{2}(-4)(-5)\cdot(-x)^2+\cdots\\&\quad+\frac{1}{n!}(-4)(-5)\cdots[-4-(n-1)](-x)^n+\cdots)\\&=2x\cdot(1+4x+\frac{4\cdot5}{2}x^2+\cdots+\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3)x^n+\cdots)\\&=2x+8x^2+4\cdot5x^3+\cdots+\frac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+3)x^{n+1}+\cdots,\end{aligned}$$

所以
$$f(n)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2).$$
□

例 6.6.4 求解例 6.4.1 中非线性递推关系式(6.4.5).

解 设 $A(x)=\sum_{n=0}^{\infty}T(n)x^n$，则有

$$\begin{aligned}x\cdot A^2(x)&=\Big[\sum_{n=0}^{\infty}T(n)x^n\cdot\sum_{m=0}^{\infty}T(m)x^m\Big]x\\&=\Big[\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m+n=k}T(n)T(m)x^nx^m\Big]x\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\sum_{n=0}^{k}T(n)T(k-n)x^{k+1}\Big)\\&=\sum_{k=0}^{\infty}T(k+1)x^{k+1}\\&=\sum_{k=1}^{\infty}T(k)x^k\end{aligned}$$

$$= A(x) - T(0)x^0$$
$$= A(x) - 1.$$

解方程 $xA^2(x) - A(x) + 1 = 0, A(0) = 1$,得

$$A(x) = \frac{1}{2x}(1 - \sqrt{1-4x}),$$

因为

$$\sqrt{1-4x} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^{2n-1}} \binom{2n-2}{n-1} 4^n x^n = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \binom{2n-2}{n-1} x^n,$$

所以

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{1}{2x}(1 - \sqrt{1-4x}), \\ &= \frac{1}{2x} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \binom{2n-2}{n-1} x^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} x^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} x^n. \end{aligned}$$

由此得到 $T(n) = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$,这与我们在 2.6 节中所得到的结果是一致的,即 $T(n) = c(n+1)$ 为第 $n+1$ 个 Catalan 数. □

通过以上例子,我们看到生成函数法的广泛应用,它不仅可以用来求解线性递推关系,而且还可以用来求解某些非线性递推关系.此外,这里所提到并求解的都是一元(即一个下标数列)的递推关系,但有时我们也需要求解二元数列的递推关系,如递推关系式(6.4.4)就是二元数列的递推关系.用生成函数法也可以用来求解某些二元数列的递推关系,我们以例 6.6.5 来说明具体求法.

例 6.6.5　设集合 $S = \{1, 2, \cdots, n\}$,在 S 的一切 k 元子集中,问不含 S 中相邻两个数的 k 元子集有多少个?

解　设有 $f(n,k)$ 个.显然有 $f(n,0) = 1, f(n,1) = n, f(2k-1,k) = 1$, $f(2k,k) = k+1$,且当 $n < 2k-1$ 时,有 $f(n,k) = 0$.

下面我们来建立 $f(n,k)$ 所满足的递推关系.我们把集合 S 的不含相邻两个数的 k 元子集分为两大类,一类是不含数 n 的,另一类是包含数 n 的.易见,不含数 n 的 k 元子集,实际上也就是集合 $\{1, 2, \cdots, n-1\}$ 的不含相邻两数的 k 元子集,因此,这一类中共有 $f(n-1,k)$ 个集合.另一类是包含数 n 的,既然包含 n,则一定不包含数 $n-1$.因此,这一类中共有 $f(n-2,k-1)$ 个集合.综合以上,我们得到 $f(n,k)$ 满足以下递推关系

$$f(n,k)=f(n-1,k)+f(n-2,k-1).$$

用生成函数求解上述二元数列的递推关系.

令 $F(k)=\sum\limits_{n=2k-1}^{\infty}f(n,k)x^n$,则有

$$\begin{aligned}F(k)&=\sum_{n=2k-1}^{\infty}f(n,k)x^n\\&=\sum_{n=2k-1}^{\infty}(f(n-1,k)+f(n-2,k-1))x^n\\&=\sum_{n=2k-1}^{\infty}f(n-1,k)x^n+\sum_{n=2k-1}^{\infty}f(n-2,k-1)x^n\\&=x\sum_{n=2k-2}^{\infty}f(n,k)x^n+x^2\sum_{n=2k-3}^{\infty}f(n,k-1)x^n\\&=xF(k)+x^2F(k-1),\end{aligned}$$

即有 $F(k)-xF(k)-x^2F(k-1)=0$.解此方程得

$$F(k)=\frac{x^2}{1-x}F(k-1).$$

从而得

$$F(k)=\left(\frac{x^2}{1-x}\right)^{k-1}F(1).$$

又因为

$$\begin{aligned}F(1)&=\sum_{n=1}^{\infty}f(n,1)x^n\\&=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=\frac{x}{(1-x)^2},\end{aligned}$$

所以

$$F(k)=\frac{x^{2k-1}}{(1-x)^{k+1}}=x^{2k-1}\cdot(1-x)^{-(k+1)}.$$

再由

$$\begin{aligned}(1-x)^{-(k+1)}&=\sum_{i=0}^{\infty}\binom{k+1+i-1}{i}x^i\\&=\sum_{i=0}^{\infty}\binom{k+i}{i}x^i\end{aligned}$$

得

$$\begin{aligned}F(k)&=x^{2k-1}\cdot\sum_{i=0}^{\infty}\binom{k+i}{i}x^i\\&=\sum_{i=0}^{\infty}\binom{k+i}{i}x^{2k+i-1}\end{aligned}$$

$$= \sum_{n=2k-1}^{\infty} \binom{n-k+1}{k} x^n,$$

于是得到

$$f(n,k) = \binom{n-k+1}{k}. \quad \square$$

尽管生成函数法可以求解许多递推关系，但它也不是万能的，例如对于递推关系式(6.4.4)，即使用生成函数法也不易求解. 实际上，递推关系式(6.4.4) 中的二元数列 $S(n,k)$ 就是著名的第二类 Stirling 数.

Stirling 数同 Fibonacci 数、Catalan 数一样，都在组合计数问题中起着重要作用. 它分为两类：第一类 Stirling 数和第二类 Stirling 数. 若记 $(x)_k = x(x-1)\cdots(x-k+1)$，并规定 $(x)_0 = 1$，则

$$(x)_0, (x)_1, (x)_2, \cdots, (x)_n, \cdots$$

是多项式空间的一组基. 且

$$1, x, x^2, \cdots, x^n, \cdots$$

是多项式空间的另一组基. 这两组基间可以相互表示，我们有

$$x^n = \sum_{k=0}^{\infty} S(n,k)(x)_k,$$

$$(x)_n = \sum_{k=0}^{\infty} s(n,k)x^k.$$

其中 $S(n,k)$ 是第二类 Stirling 数，而 $s(n,k)$ 就是第一类 Stirling 数. 由 $s(n,k)$ 的定义，可知 $s(n,k)$ 满足如下递推关系

$$\begin{cases} s(n,k) = s(n-1,k-1) - (n-1)s(n-1,k), \\ s(n,0) = 0, s(n,n) = 1. \end{cases}$$

两类 Stirling 数都可由它们所满足的递推关系及初始值递归地求出. 表 6.6.1 和表 6.6.2 分别给出了一些第一类 Stirling 数和第二类 Stirling 数.

表 6.6.1　第一类 Stirling 数 $s(n,k)$

$s(n,k)$　k / n	0	1	2	3	4	5	…
1	0	1	0	0	0	0	…
2	0	−1	1	0	0	0	…
3	0	2	−3	1	0	0	…
4	0	−6	11	−6	1	0	…
5	0	24	−50	35	−10	1	…

表 6.6.2 第二类 Stirling 数 $S(n,k)$

$S(n,k)$ \ k / n	1	2	3	4	5	…
1	1	0	0	0	0	…
2	1	1	0	0	0	…
3	1	3	1	0	0	…
4	1	7	6	1	0	…
5	1	15	25	10	1	…

另外，第二类 Stirling 数 $S(n,k)$ 与例 5.3.1 中的数 $s_{n,k}$ 有如下关系

$$S(n,k)=\frac{1}{k!}s_{n,k}=\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^n.$$

习题六

1. 计算 Petersen 图的边色数和色数.

2. 求偶阶完全图 K_{2n} 和奇阶完全图K_{2n+1} 的边色数.

3. 证明：对任何图 G 均有$\chi(G)\leqslant 1+l(G)$，其中 $l(G)$ 表示 G 中最长链的长度.

4. 如果连通图 G 是第二类图，而对 G 的每一条边 e 都有 $\chi'(G-e)<\chi'(G)$，则称G是(关于边着色)临界图.若G是临界图，且$\Delta(G)=\Delta$，则称G是Δ 临界图.

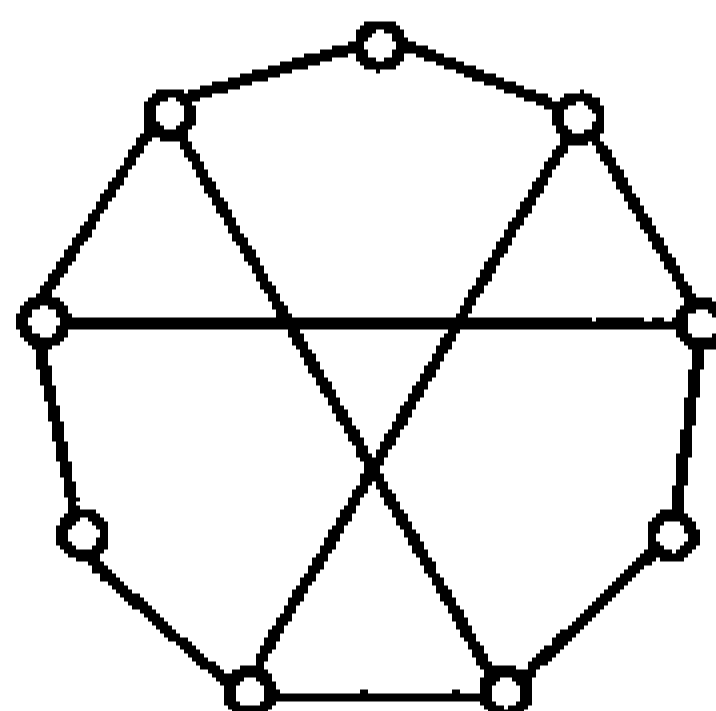
(1) 试各举一个3临界图、4临界图的例子(提示：可从某一个第二类图出发，逐个去掉非临界边).

(2) 证明：G 是 2 临界图的充要条件为 G 是奇圈.

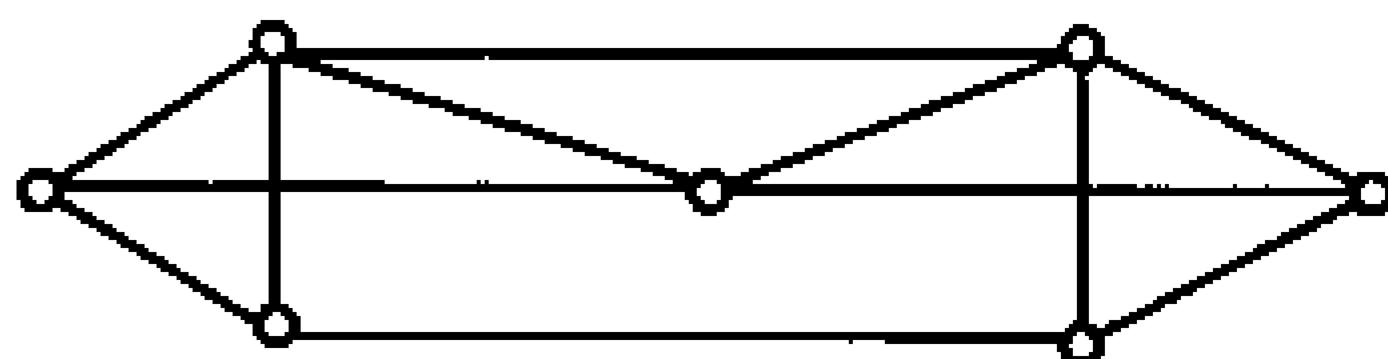
(3) 检验下面不包含三角形的题图 6.1 是 3 临界图.

5. 设 $V(G)=\{x_1,\cdots,x_v\}$，$d(x_1)\geqslant d(x_2)\geqslant\cdots\geqslant d(x_v)$ 是图G的度序列，k 是满足$k\leqslant d(x_k)+1$ 的最大自然数，证明 $\chi(G)\leqslant k$.

6. 若对简单图 G 的任一顶点x 都有$\chi(G-x)<\chi(G)$，则称 G 是(关于点着色的) 点临界图；若对 G 的任一条边e 有$\chi(G-e)<\chi(G)$，则称 G 是(关于点着色的) 边临界图，并且若此时 $\chi(G)=k$，相应地 G 还叫做k 色点临界图或k 色边临界图. 显然无孤立点的边临界图必为点临界图，验证题图 6.2 是点临界图



题图 6.1



题图 6.2

而非边临界图.

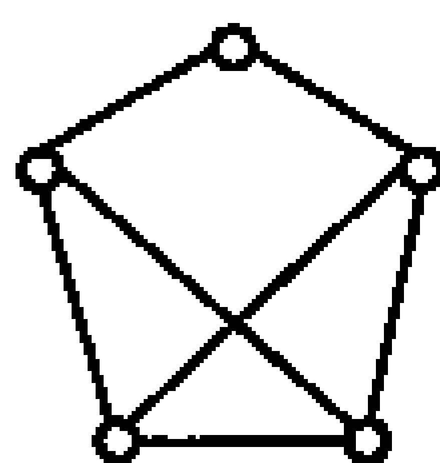
7. 设 G 是简单图,证明:

(1)G 是 1 色点临界图 $\Leftrightarrow G = K_1$;

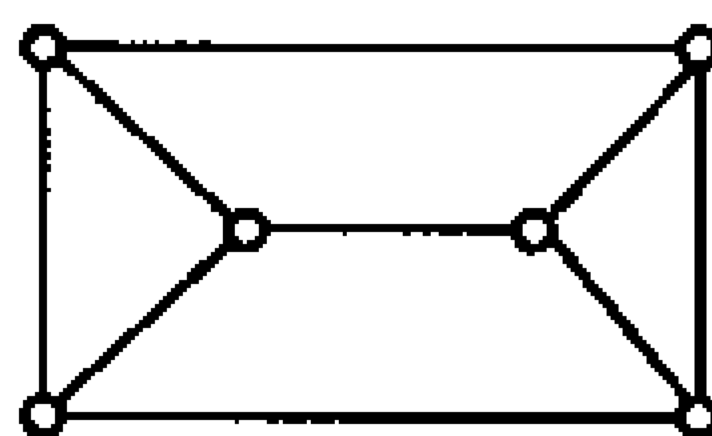
(2)G 是 2 色点临界图 $\Leftrightarrow G = K_2$;

(3)G 是 3 色点临界图 $\Leftrightarrow G$ 为奇圈.

8. 计算题图 6.3(a) 和图 6.3(b) 的色多项式.



(a)



(b)

题图 6.3

9. 证明 $k^4 - 3k^3 + 3k^2$ 不是色多项式.

10. 若 $G_1, G_2, \cdots, G_\omega$ 是 G 的各分支,证明

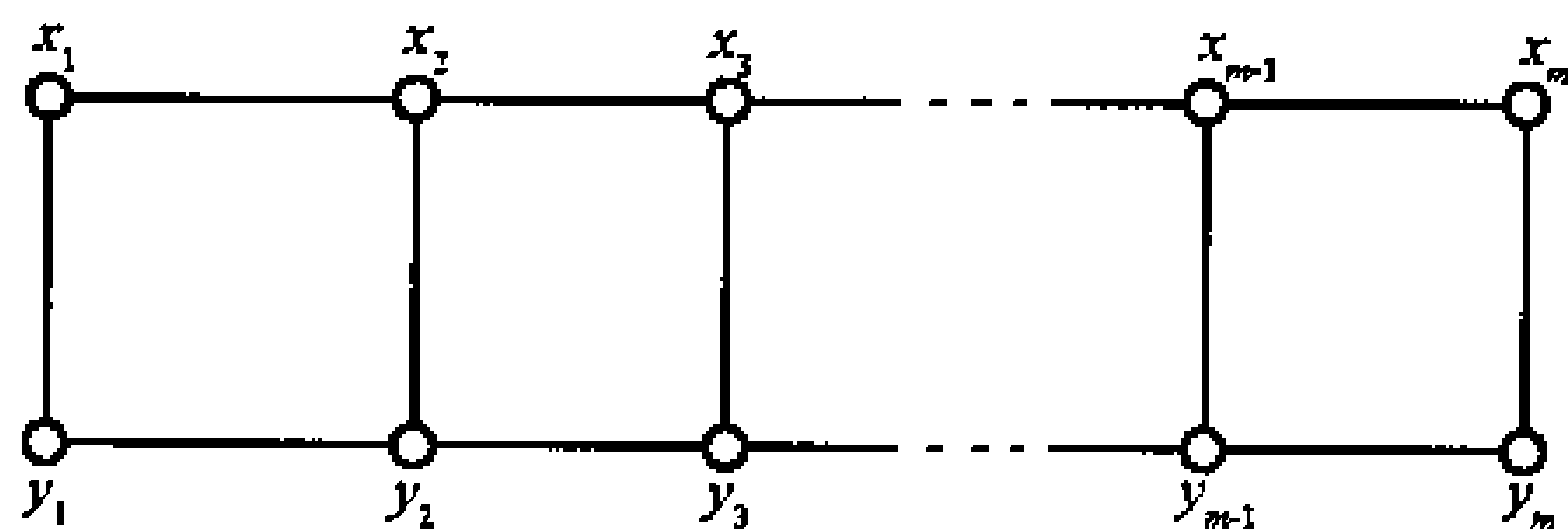
$$\pi(G,k) = \pi(G_1,k)\pi(G_2,k)\cdots\pi(G_\omega,k).$$

11. 求轮图 W_n 的色多项式 $\pi(W_n,k)$.

12. 一个楼梯有 n 个台阶,一个人爬楼梯一步可以上一个台阶,也可以上两个台阶,那么这个人爬上这 n 个台阶的楼梯有多少种不同的方式?

13. 证明下述 $2m$ 个顶点的梯子图(题图 6.4) 的支撑树的个数为

$$\frac{1}{2\sqrt{3}}\left((2+\sqrt{3})^m-(2-\sqrt{3})^m\right).$$



题图 6.4

14. 求 $\tau(W_n)$.

15. 求 $2m$ 阶梯子图(即题图 6.4) 的色多项式.

16. $E(n,k,h)$ 表示有 n 个顶点 $k-1$ 部 Turán 图 $T_{n,k-1}$ 中的 h 团的个数, 证明 $E(n,k,h)$ 满足下列递推关系

$$E(n,k,h)=\sum_{i=0}^{h}\binom{k-1-i}{h-i}E(n-k+1,k,i),$$

其中 $E(n,k,0)=1$.

第七章 平面图

在第一章中给出的图的抽象定义并不涉及图形，但是抽象定义的图与由点和线画出的图形之间有着紧密的联系．因此，研究与某些特殊的图形有关的图的性质，自然会成为图论的内容之一．

本章将介绍与边不交画在平面上的图（即平面图）的有关的结论，如 Euler 公式、Kuratowski 定理以及更深入的四色问题等．

7.1 平面图和平图

如果一个图能画在平面上，使得它的边仅仅在端点相交，则称这个图可嵌入平面（embeddable on a plane），或称它为平面图（planar graph）．平面图 G 的这样一种画法称为 G 的一个平面嵌入（planar embedding）．已经嵌入平面内的一个图称为平图（plane graph）．图 7.1.1 就给出了图 K_5-e 及其平面嵌入．

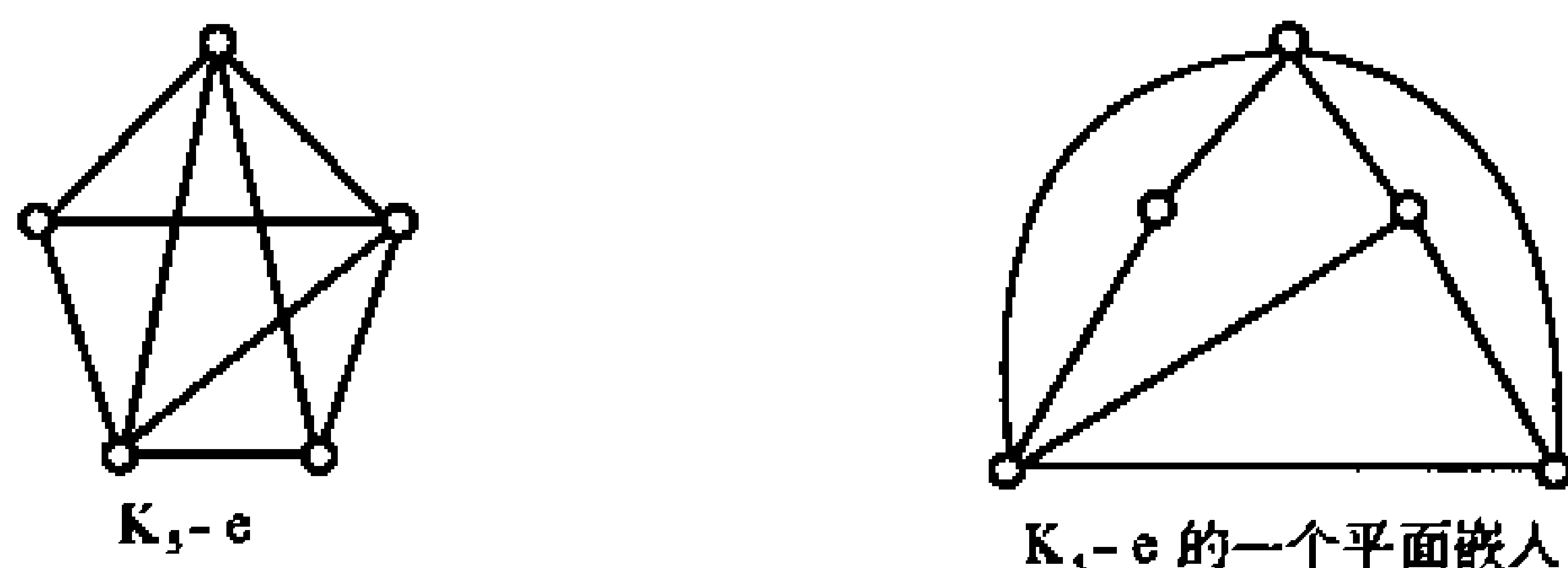


图 7.1.1 平面图及其平面嵌入

在现实生活中，有大量的实际问题会涉及到图的平面性．例如，电路板的印刷、集成电路板的布线，以及工程计划网络的布局等问题．

平面嵌入的概念可推广到曲面上和空间中去．若图 G 能画到曲面 S 上（或三维空间 $\mathbb{R}^3$ 中），使 G 的边仅仅在端点相交，则称 G 可嵌入曲面 S（或三维空间 $\mathbb{R}^3$），图 G 的这样一种画法称为 G 的一个 S 嵌入（或 $\mathbb{R}^3$ 嵌入）．

定理 7.1.1 任何图 G 都可以嵌入三维空间 $\mathbb{R}^3$．

证明 只需构造出图 G 的一个 $\mathbb{R}^3$ 嵌入．首先在 $\mathbb{R}^3$ 中任取一条直线 l，再取

$\varepsilon(G)$ 个半平面与 G 的边一一对应，并使这些半平面都以直线 l 为界，且互不重合，然后在 l 上取 $\nu(G)$ 个顶点与 G 的顶点一一对应. 若 G 中顶点 w 上有环 e_1，就在与 e_1 对应的半平面上画一个圆与 l 相切于 w 的对应点；若 $e_2 = uv$ 是 G 的一条连杆，则在 e_2 对应的半平面上画一个半圆，使半圆的两个端点分别是 l 上与 u，v 对应的两个点. 显然，G 的这种画法是一个 $\mathbb{R}^3$ 嵌入. □

是不是每个图也都可以嵌入平面呢？不是的. 例如 K_5 和 $K_{3,3}$ 就不能嵌入平面，这一点将在 7.2 节证明.

定理 7.1.2　图 G 可嵌入平面，当且仅当 G 可嵌入球面.

证明　令 zz' 是球面 S 的一条直径. 取平面 P 与球面 S 在 z' 处相切，则 $\forall x \in S\setminus\{z\}$，直线 zx 必与 P 相交于一点 x'；反之，对 $\forall y' \in P$，直线 zy' 必与 S 有一交点 $y \neq z$，用这种方法建立了点集 $S\setminus\{z\}$ 与点集 P 之间的一一对应. 平面 P 上的一段连续曲线对应到 S 上仍为一段连续曲线；反之，S 上的一段不经过 z 的连续曲线对应到 P 上也是一段连续曲线. 这样，如果图 G 在 P 上有一个平面嵌入，就会得到 G 在 S 上的一个球面嵌入；反之，如果图 G 在 S 上有一个球面嵌入 G'，则只需要把 z 不取在 G' 的顶点上或边上，也就得到 G 在 P 上的一个平面嵌入. □

这个定理的证明可以直观地说明如下：若图 G 可嵌入平面，即可用一张纸画出 G 的一个平面嵌入，在墨迹未干之前，把这张纸包在球面上，则球面上出现的就是 G 的一个球面嵌入；同样，若图 G 可嵌入球面，先在球面上描绘出 G 的一个球面嵌入，然后用一张白纸包住墨迹未干的球面，此时白纸上印出的图形则为 G 的一个平面嵌入.

平图 G 的边和顶点将平面分成若干个连通区域. 每个区域的边界都是由平图 G 的顶点和边组成的. 每个区域连同它的边界就构成了平图 G 的一个面(face). 每个平图恰有一个面是无界的，这个面称为外部面(exterior face)，其他的面称为内部面(interior face). 我们用 $F(G)$ 和 $\phi(G)$ 分别表示平图 G 中面的集合和面的数目.

图 7.1.2 中有 6 个面，f_1 为外部面.

定理 7.1.3　设 v 是平面图 G 的一个顶点，则存在 G 的一个平面嵌入 $\tilde{G}$，使得 v 是 $\tilde{G}$ 的外部面边界上的顶点.

证明　因 G 是平面图，故由定理 7.1.2 知 G 有一个球面嵌入 G'，z 是 G' 中顶点 v 所在的面的内点. 取球面的直径 zz'，过 z' 作一个与球面相切的平面 P，按照定理 7.1.2 证明中的方法可以得到 G 在 P 上的一个平面嵌入 $\tilde{G}$，此时 v 必在 $\tilde{G}$

的外部面上. □

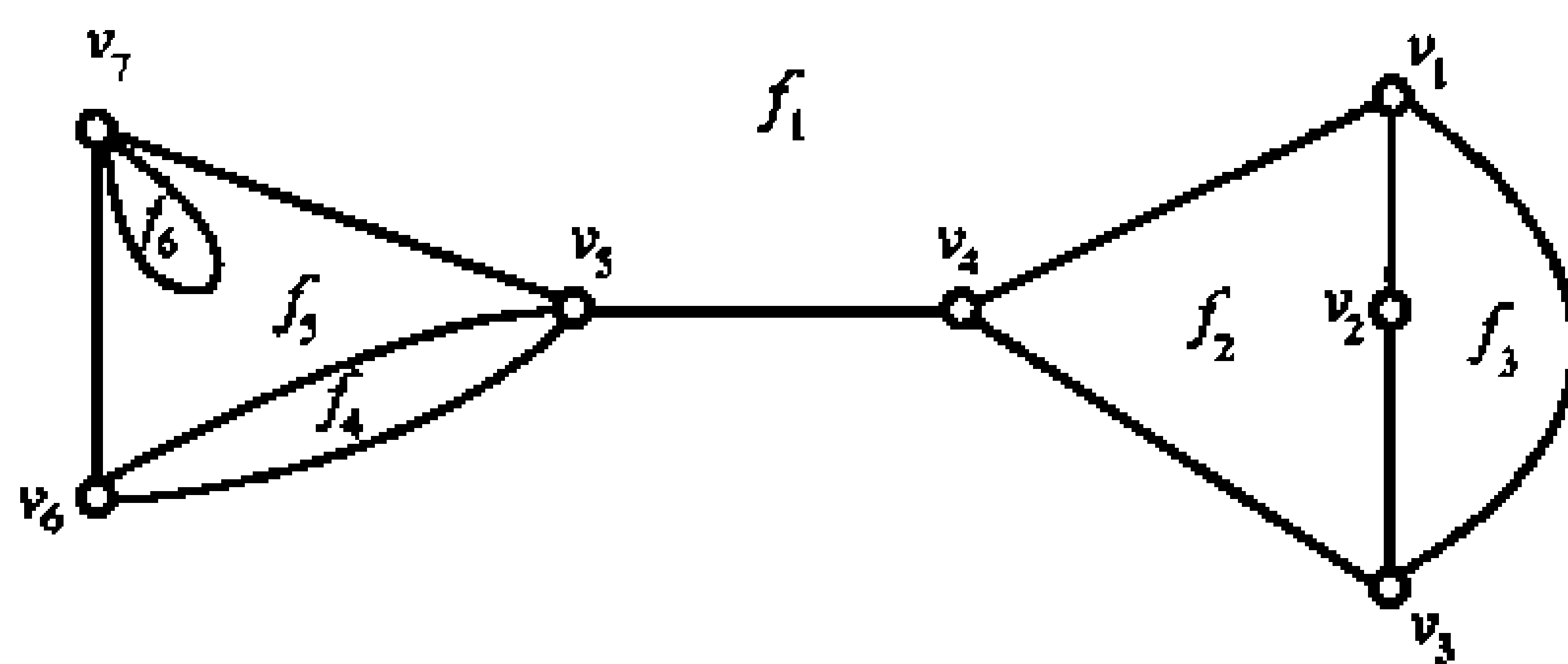


图 7.1.2　图的面

用 $b(f)$ 表示平图 G 的面 f 的边界. 若 G 连通, 则 $b(f)$ 可以视做一条闭途径; G 在 $b(f)$ 中的每条割边被 $b(f)$ 通过两次; 当 $b(f)$ 不含割边和环时, 则 $b(f)$ 是 G 的圈. 例如, 在上面的图 7.1.2 中, $b(f_1) = v_1v_3v_4v_5v_6v_7v_5v_4v_1$, $b(f_2) = v_1v_2v_3v_4v_1$, $b(f_5) = v_5v_6v_7v_7v_5$. 这里 $b(f_1)$ 和 $b(f_5)$ 都是闭途径, 前者含有割边, 后者含有环, 故都不是圈. 而 $b(f_2)$ 是一个圈.

我们称面 f 与 $b(f)$ 上的顶点和边是关联的(incident). 若 e 是平图的割边, 则只有一个面与 e 关联, 否则有两个面与 e 关联. 图 G 中 $b(f)$ 所含的边数称为面 f 的度(degree), 记作 $d_G(f)$, 即 $d_G(f)$ 是面 f 在平图 G 中关联的边的数目, 其中 f 关联的每条割边被计算两次.

给定一个平图 G, 可以定义另一个图 G^* 如下: 对应于 G 的每个面 f 有 G^* 的惟一顶点 f^*, 对应于 G 的每条边 e 有 G^* 的惟一边 e^*; G^* 中两个顶点 f^* 和 g^* 由边 e^* 连接, 当且仅当它们对应于 G 中的两个面 f 和 g 同时与 e 关联, 即边界 $b(f)$ 与 $b(g)$ 有公共边 e. 图 G^* 称为平图 G 的对偶图(dual graph).

任意一个平图 G 的对偶图 G^* 都是平面图. 可以按下述方式给出 G^* 的一个平面嵌入. 在 G 的每个面 f 内部取一个点 f^*, 若面 f 和面 g 与边 e 关联, 就在 f, g 的对应点 f^*, g^* 之间连一条边 e^*, 使 e^* 穿过 e, 且只与 e 相交一次, 而与 G 的其他边都不相交, 并且与 G^* 的各条边除在公共的端点外也不相交, 这样画出的 G^* 就是一个平图.

图 7.1.3 就给出了一个图及其对偶图.

如果平图 G 中的两个不同的面的边界有公共边, 则称这两个面是相邻的(adjacent). 设 G^* 是平图 G 的对偶图, G^* 中的不同顶点 f^* 与 g^* 相邻, 当且仅当 G 中与 f^* 和 g^* 对应的两个不同的面 f 和 g 相邻. 对于平图 G 的任意两个不同的面 f 和 g, 显然必有 $f_1, f_2, \cdots, f_k$ 存在, 使得 $f_1 = f$, $f_k = g$, 且 f_if_{i+1} 相邻($i = 1, 2, \cdots, k-1$). 因此, 对于平图 G 的对偶图 G^* 的任意两个顶点 f^* 和 g^*, G^* 中总存在一条连接它们的链: $f^*f_2^*\cdots f_{k-1}^*g^*$, 于是有如下定理:

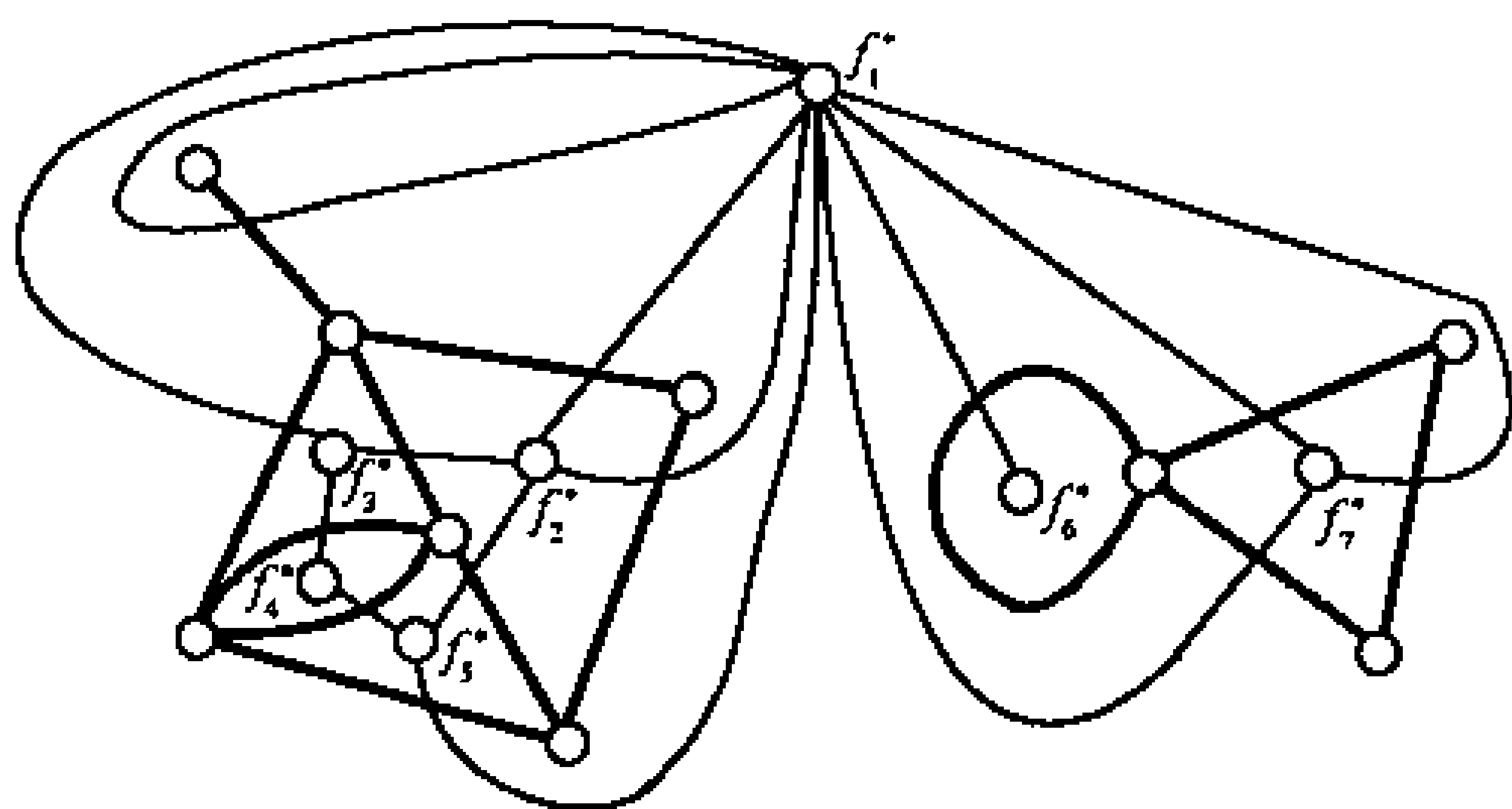


图 7.1.3 图和它的对偶图

定理 7.1.4 任何一个平图的对偶图都是连通平面图. □

不难知道,平图 G 与其对偶图 G^* 有下列性质.

(1) e 为 G 的环,当且仅当 e^* 为 G^* 的割边;e 为 G 的割边,当且仅当 e^* 为 G^* 的环.

(2) $\nu(G^*) = \phi(G), \varepsilon(G^*) = \varepsilon(G)$.

(3) $\forall f \in F(G), d_{G^*}(f^*) = d_G(f)$.

根据性质(2) 和性质(3),容易得到

$$\sum_{f\in F(G)} d_G(f) = \sum_{f^* \in V(G^*)} d_{G^*}(f^*) = 2\varepsilon(G^*) = 2\varepsilon(G),$$

因此有:

定理 7.1.5 对于任何平图 G 都有 $\sum_{f\in F(G)} d_G(f) = 2\varepsilon(G)$. □

由此可以直接得到下述推论:

推论 7.1.6 任何平图中度为奇数的面的个数为偶数. □

7.2 Euler 公式

在连通平图中,有一个涉及顶点数、边数和面数三者关系的简单公式——Euler 公式.

定理 7.2.1(Euler, 1736) 设 G 是连通平图,则

$$\nu(G) - \varepsilon(G) + \phi(G) = 2. \tag{7.2.1}$$

证明 对 G 的面数 ϕ 进行归纳. 当 $\phi = 1$ 时, G 只有一个外部面,从而 G 中无圈. 又因 G 连通,故 G 是树,于是 $\varepsilon = \nu - 1$,式(7.2.1) 成立.

设连通平图 G 的面数 $\phi \geqslant 2$,且对于面数小于 ϕ 的任一连通平图,式(7.2.1)

成立.显然 G 含有圈,设 e 是G中某个圈上的一条边,则 $G-e$ 仍是连通平图,而 G 中与e 关联的两个面结合成$G-e$ 中的一个面,即 $\phi(G-e)=\phi(G)-1$,由归纳假设有

$$\nu(G-e)-\varepsilon(G-e)+\phi(G-e)=2.$$

再由 $\nu(G-e)=\nu(G)$,$\varepsilon(G-e)=\varepsilon(G)-1$,得

$$\nu(G)-\varepsilon(G)+\phi(G)=2.$$ □

推论 7.2.2　设平图 G 有ω 个连通分支,则

$$\nu-\varepsilon+\phi=\omega+1. \tag{7.2.2}$$

证明　对 G 的每个连通分支G_i 应用一次 Euler 公式,$i=1,\cdots,\omega$,然后相加,得

$$\sum_{i=1}^{\omega}\nu(G_i)-\sum_{i=1}^{\omega}\varepsilon(G_i)+\sum_{i=1}^{\omega}\phi(G_i)=2\omega. \tag{7.2.3}$$

再注意到$\sum_{i=1}^{\omega}\nu(G_i)=\nu(G)$, $\sum_{i=1}^{\omega}\varepsilon(G_i)=\varepsilon(G)$;而在计算 G_i 的面数时都用过一次外部面,因此$\sum_{i=1}^{\omega}\phi(G_i)=\phi(G)+\omega-1$,代入式(7.2.3) 即得式(7.2.2).

□

不难知道,一个给定的平面图的平面嵌入不一定惟一.但是,我们却有如下结论.

推论 7.2.3　一个平面图的所有平面嵌入具有相同的面数.

证明　因为给定的平面图 G 的顶点数ν、边数 ε 和连通分支数ω 是固定的,而且 G 的任意一个平面嵌入$\tilde{G}$ 与G 有相同的顶点数、边数和连通分支数,所以由公式(7.2.2) 知,$\tilde{G}$ 的面数$\phi=\varepsilon-\nu+\omega+1$ 为定值. □

图 G 中最短圈的长称为G 的围长(girth);若 G 中无圈,则定义 G 的围长为 ∞.利用围长的概念可以给出平面图的边数的上界.

推论 7.2.4　设平面图 G 的围长为g,$3\leqslant g<\infty$,则

$$\varepsilon\leqslant\frac{g}{g-2}(\nu-2). \tag{7.2.4}$$

证明　因为一个平面图与它的任意一个平面嵌入有相同的顶点数、边数和围长,所以不妨设 G 是平图.由于 G 的每个面f 均有$d_G(f)\geqslant g$,因此

$$2\varepsilon=\sum_{f\in F(G)}d_G(f)\geqslant\phi\cdot g,$$

即

$$\phi\leqslant 2\varepsilon/g. \tag{7.2.5}$$

把式(7.2.5)代入式(7.2.2),得

$$\nu-\varepsilon+2\varepsilon/g\geqslant\omega+1\geqslant 2,$$

从而由 $g\geqslant 3$ 即得式(7.2.4). □

推论 7.2.5 若 G 是简单平面图,$\nu\geqslant 3$,则

$$\varepsilon\leqslant 3\nu-6. \tag{7.2.6}$$

证明 由于 G 是简单图,因此 G 的围长 $g\geqslant 3$.若 G 含有圈,则 $g<\infty$,由式(7.2.4)有

$$\varepsilon\leqslant\frac{g}{g-2}(\nu-2)\leqslant 3(\nu-2)=3\nu-6$$

若 G 不含圈,则 G 为森林,从而由 $\nu\geqslant 3$ 知

$$\varepsilon\leqslant\nu-1\leqslant 3\nu-6.$$ □

推论 7.2.6 设 G 是简单平面图,则 $\delta\leqslant 5$.

证明 对于 $\nu=1,2$,推论显然成立.若 $\nu\geqslant 3$,由式(7.2.6)知

$$\delta\cdot\nu\leqslant\sum_{v\in V(G)}d(v)=2\varepsilon\leqslant 6\nu-12,$$

即 $(6-\delta)\nu\geqslant 12$,故 $6-\delta>0$,从而 $\delta\leqslant 5$. □

推论 7.2.7 K_5 和 $K_{3,3}$ 都不是平面图.

证明 因为

$$10=\varepsilon(K_5)>3\nu(K_5)-6=9,$$

所以由式(7.2.6)知 K_5 不是平面图.

由于 $K_{3,3}$ 的围长 $g=4$,因此

$$\varepsilon(K_{3,3})=9>\frac{g}{g-2}(\nu(K_{3,3})-2)=8.$$

从而由式(7.2.4)知 $K_{3,3}$ 不是平面图. □

设 G 是简单平面图,若对于 G 中任何不相邻的相异顶点 u 和 v,$G+uv$ 不是平面图,则称 G 为极大平面图(maximal planar graph).例如,K_5-e 就是极大平面图.极大平面图的平面嵌入称为极大平图(maximal plane graph).

定理 7.2.8 G 是 $\nu\geqslant 3$ 的极大平面图,当且仅当 G 的任何平面嵌入中每个面的边界都是 3 圈.

证明 充分性显然.下面证明必要性.若 G 的平面嵌入 $\tilde{G}$ 中有一个面 f 的边界 $b(f)$ 不是 3 圈,则由 G 是 $\nu\geqslant 3$ 的简单图知,$b(f)$ 中必有两个顶点 u 和 v 在 $\tilde{G}$ 中不相邻,从而 $\tilde{G}+uv$ 仍为平图,它是 $G+uv$ 的一个平面嵌入,此与 G 是极大平面图相矛盾. □

推论 7.2.9　设 G 是 $\nu \geqslant 3$ 的简单平面图，则 G 是极大平面图，当且仅当 $\varepsilon = 3\nu - 6$.

证明

(⇒) 设 G 为极大平面图，则 G 连通，且 G 的任何平面嵌入 $\widetilde{G}$ 中每个面的度均为 3，从而

$$3\phi(\widetilde{G}) = \sum_{f \in F(\widetilde{G})} d_{\widetilde{G}}(f) = 2\varepsilon(\widetilde{G}),$$

于是由 Euler 公式有

$$2 = \nu(\widetilde{G}) - \varepsilon(\widetilde{G}) + \phi(\widetilde{G}) = \nu(\widetilde{G}) - \frac{1}{3}\varepsilon(\widetilde{G}),$$

因此　$$\varepsilon(G) = \varepsilon(\widetilde{G}) = 3\nu(\widetilde{G}) - 6 = 3\nu(G) - 6.$$

(⇐) 设 G 是 $\nu \geqslant 3$ 的简单平面图，且 $\varepsilon = 3\nu - 6$，则由式(7.2.6) 知 G 是极大平面图. □

如果图 G 有一个平面嵌入 $\widetilde{G}$，使 G 的所有顶点均在 $\widetilde{G}$ 的外部面的边界上，则称 G 为外平面图(outerplanar graph). 外平面图 G 的这样一个平面嵌入 $\widetilde{G}$ 称为外平图(outerplanar graph). 若 G 是简单外平面图，且对于 G 中任何不相邻的相异顶点 u 和 v，$G + uv$ 不是外平面图，则称 G 是极大外平面图(maximal outerplane graph). 极大平面图的一个使其所有顶点均在外部面的边界上的平面嵌入称为极大外平图(maximal outerplane graph).

同定理 7.2.8 的证明类似. 可以证明下面的定理：

定理 7.2.10　G 是 $\nu \geqslant 3$ 的极大外平图，当且仅当 G 的外部面的边界是 Hamilton 圈，且每个内部面的边界是 3 圈. □

定理 7.2.11　设 G 是 $\nu \geqslant 3$ 的极大外平图，则 G 有 $\nu - 2$ 个内部面.

证明　对 ν 进行归纳. 当 $\nu = 3$ 时，结论显然成立. 设 G 是 $\nu(G) \geqslant 4$ 的极大平图，记 $\nu = \nu(G)$. 假设对于所有顶点数小于 ν 的极大外平图 G_1 都有 $\nu(G_1) - 2$ 个内部面. 根据定理 7.2.10，G 的外部面的边界上有一个顶点 v 的度为 2，因此，$G - v$ 仍是极大外平图. 由归纳假设知，$G - v$ 有 $\nu(G - v) - 2$ 个内部面，从而

$$\phi(G) - 1 = \phi(G - v) = \nu(G - v) - 1 = \nu(G) - 2,$$

即 $\phi(G) = \nu(G) - 1$，故 G 有 $\nu(G) - 2$ 个内部面. □

推论 7.2.12

(1) 若 G 为极大外平面图，$\nu \geqslant 3$，则 $\varepsilon = 2\nu - 3$；

(2) 若 G 为简单外平面图，$\nu \geqslant 3$，则 $\varepsilon \leqslant 2\nu - 3$；

(3) 假设 G 是 $\nu \geqslant 3$ 的简单外平面图，则 G 是极大外平面图，当且仅当

$\varepsilon = 2\nu - 3$.

证明

(1) 由定理 7.2.11, G 有一个平面嵌入 $\widetilde{G}$ 为极大外平图, 且 $\widetilde{G}$ 有 $\nu - 2$ 个内部面. 再由定理 7.2.10, 得

$$\varepsilon(G) = \varepsilon(\widetilde{G}) = \frac{1}{2}\sum_{f\in F(\widetilde{G})} d_{\widetilde{G}}(f) = \frac{1}{2}[\nu(\widetilde{G}) + 3(\nu(\widetilde{G}) - 2)]$$

$$= 2\nu(\widetilde{G}) - 3 = 2\nu(G) - 3.$$

(2) 因为一个简单外平面图总可以通过添加新边得到极大外平面图, 所以由(1) 知, $\varepsilon \leqslant 2\nu - 3$.

(3) 由(1) 和(2) 即得. □

最后, 我们指出: K_4 和 $K_{2,3}$ 都不是外平面图. 这是因为 K_4 和 $K_{2,3}$ 的所有平面嵌入均具有图 7.2.1 的形式, 它总有一个顶点不在外部面的边界上.

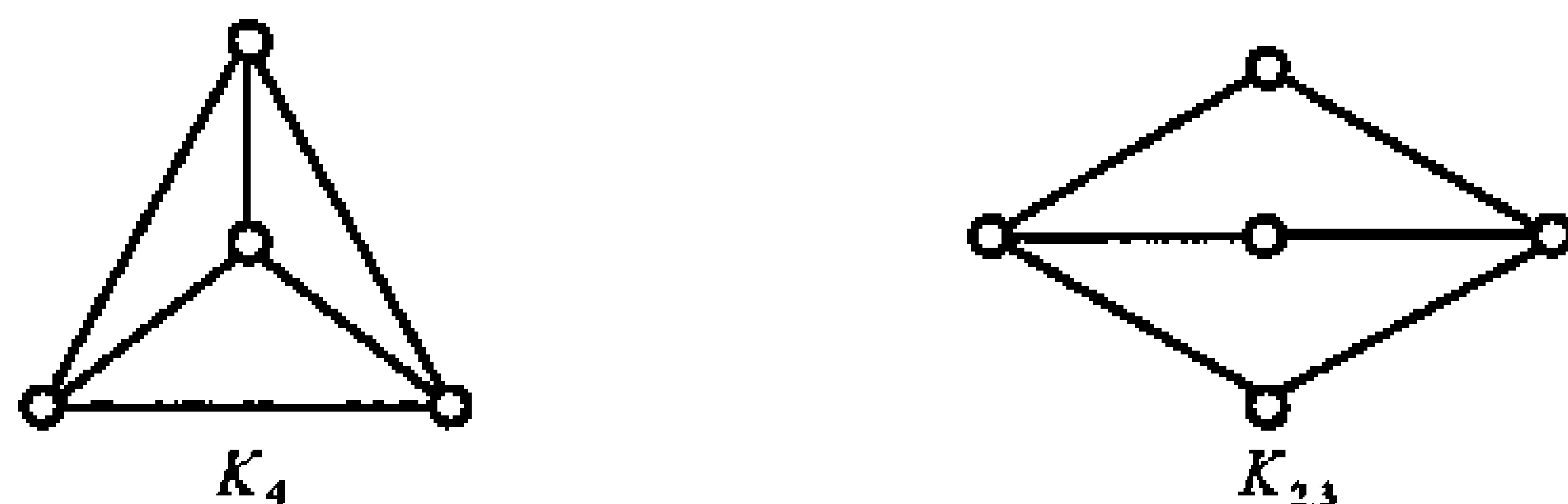


图 7.2.1 K_4 和 $K_{2,3}$ 都不是外平面图

7.3 Kuratowski 定理

本节讨论平面图和外平面图的充要条件, 为此引进一些概念和引理.

把图 G 进行一系列边的剖分而得到的图称为 G 的剖分图(subdivision).

引理 7.3.1 若 G 不是(外) 平面图, 则 G 的任何剖分图也都不是(外) 平面图. □

引理 7.3.2 若 G 是(外) 平面图, 则 G 的任何子图也是(外) 平面图. □

由于 K_5 和 $K_{3,3}$ 不是平面图, 因此根据上述两个引理可以看出: 平面图必不含 K_5 或 $K_{3,3}$ 的剖分图. 波兰数学家 Kuratowski(1930) 指出: 若 G 不含 K_5 或 $K_{3,3}$ 的剖分图, 则 G 是平面图.

设 C 是图 G 的一个圈. 所谓 G 的一个 C 分枝(branch) B 是指, 或者 B 是端点在 C 上的一条边, 或者 B 是由 $G - V(C)$ 的一个连通分支的所有边连同这个连通分支与 C 之间的所有边导出的子图. 我们把 $V(B) \cap V(C)$ 中的顶点称为 C 分

枝 B 的接触点(attachable vertex).

设 B 和 B' 是 G 的两个 C 分枝.若图 C 上存在两个顶点 x 和 y,使 B 的接触点在 C 的 (x,y) 节 P_1 上,而 B' 的接触点在 C 的另一个 (x,y) 节 P_2 上,则称 B 与 B' 是回避的(avoiding). 若 B 与 B' 不是回避的,则称它们是重叠的(overlapping).若 $V(B)\cap V(C)=V(B')\cap V(C)$,且 $|V(B)\cap V(C)|=3$,则称 B 与 B' 是3等价的(3-equivalent).若存在 C 的四个不同的顶点 x_1,x_2,x_3,x_4,其中 $x_1,x_3\in V(B)$,$x_2,x_4\in V(B')$,并且这四个顶点在 C 上的顺序为 x_1,x_2,x_3,x_4,则称 B 与 B' 是偏斜的(skew).在图7.3.1中,有四个 C 分枝,其中 B_2 与 B_3 是回避的;B_1 与 B_2 是3等价的;B_3 与 B_4 是偏斜的.

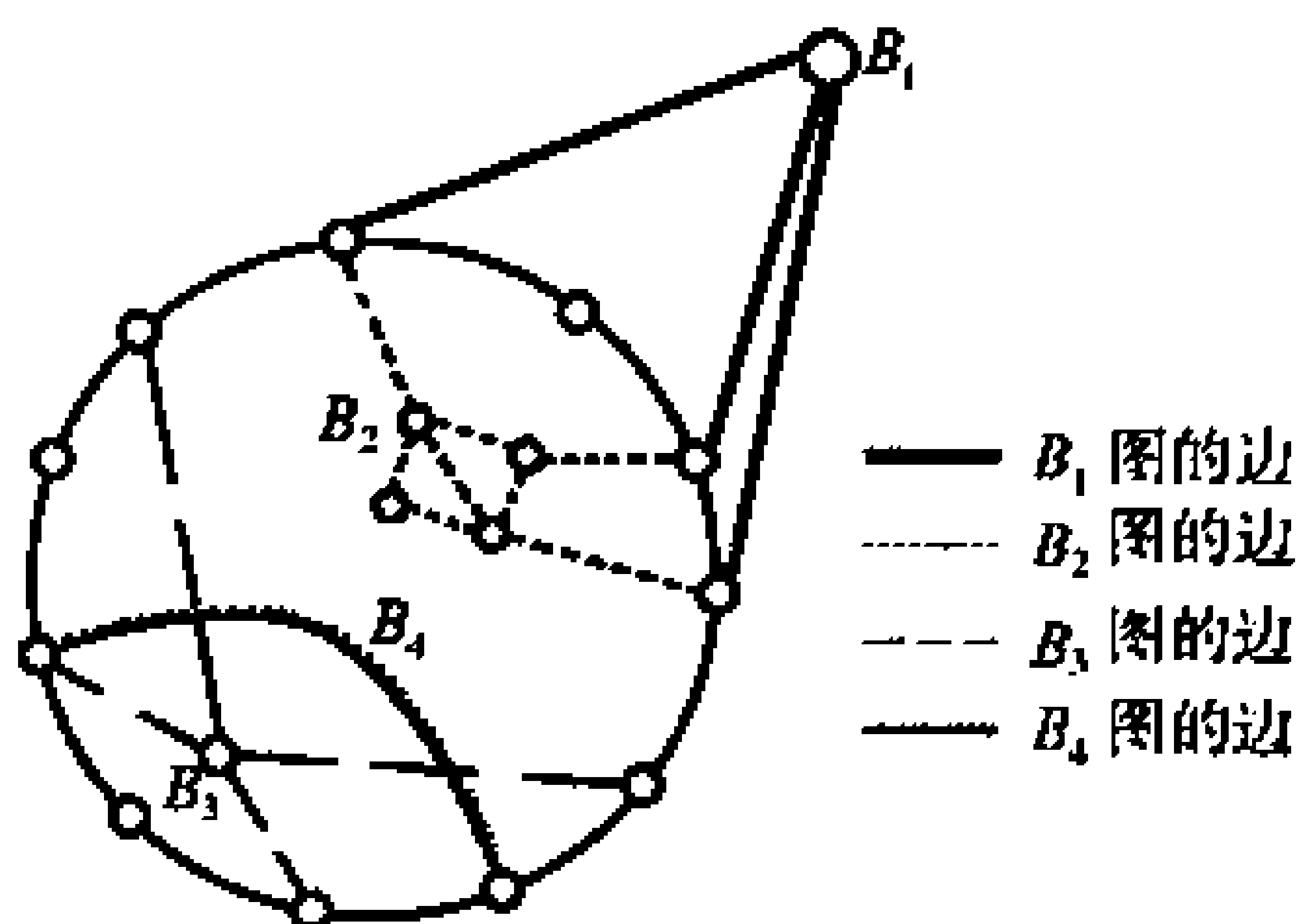


图 7.3.1　图的 C 分枝

引理 7.3.3　设 B 与 B' 是重叠的两个 C 分枝,则它们或者是3等价的或者是偏斜的.

证明　因为 B 与 B' 是重叠的,所以 B 和 B' 各有至少两个接触点.若

$$|V(B)\cap V(C)|=2 \text{ 或 } |V(B')\cap V(C)|=2,$$

则 B 与 B' 显然是偏斜的.故设 B 和 B' 都至少有3个接触点.分两种情况讨论.

(1) 若 $V(B)\cap V(C)\subseteq V(B')\cap V(C)$,设 $|V(B')\cap V(C)|=k$.当 $k=3$ 时,则 B 与 B' 是3等价的;当 $k\geqslant 4$ 时,B 与 B' 是偏斜的.

(2) 若 $V(B)\cap V(C)\not\subseteq V(B')\cap V(C)$,则 B 有一个接触点 $u\notin V(B')$,u 在 B' 的两个相继的接触点 u',v' 之间,即 u 在 C 上 (u',v') 节 P_1 上.因 B 与 B' 重叠,故 B 有一个接触点 v 不在 P_1 上,于是 B 与 B' 偏斜的. □

设 $\kappa(G)=2$,$\{u,v\}$ 是 G 的2顶点割.设 G' 是 $G-\{u,v\}$ 的一个连通分支,令 $G_1=G[V(G')\cup\{u,v\}]$,$G_2=G-V(G')$,并记

$$H_i=\begin{cases}G_i+uv, & uv\notin E(G),\\ G_i, & uv\in E(G).\end{cases}$$

显然 $\varepsilon(H_i) < \varepsilon(G), i = 1,2$,并且有:

引理7.3.4 若 G 不是平面图,则 H_1 和 H_2 中至少有一个不是平面图.

证明(反证法) 若 H_1 和 H_2 都是平面图,则由定理7.1.3可得 H_i 的平面嵌入 $\widetilde{H}_i$ 使 u,v 均在 $\widetilde{H}_i$ 的外部面边界上,$i = 1,2$,从而得到 G 的平面嵌入,矛盾. □

引理7.3.5 设 G 不是平面图,且不含 K_5 或 $K_{3,3}$ 的剖分图,并且有尽可能少的边数,则 G 是3连通简单图.

证明 设 G 满足引理的条件,则由极小性知 G 是简单连通图.先证 $\kappa(G)\geqslant 2$.若不然,设 $\{v\}$ 是 G 的1顶点割,G' 是 $G-v$ 的一个连通分支,令 $G_1 = G[V(G')\cup\{v\}]$,$G_2 = G - V(G_1)$.于是 G_1 和 G_2 都不含 K_5 或 $K_{3,3}$ 的剖分图,且它们之中至少有一个不是平面图(同引理7.3.4的证明),此与 G 的极小性矛盾.再证 $\kappa(G)\geqslant 3$.事实上,若 $\kappa(G) = 2$,设 $\{u,v\}$ 是 G 的2顶点割,由引理7.3.4知,相应的 H_1,H_2 中必有一个不是平面图.设 H_1 不是平面图,因 $\varepsilon(H_1) < \varepsilon(G)$,故由 G 的极小性知,H_1 必含有一个子图 K,它是 K_5 或 $K_{3,3}$ 的剖分图.由于 G 不含 K_5 或 $K_{3,3}$ 的剖分图,因此 $e = uv \in E(K)$.设 P 是 $H_2 - e$ 中的一条 (u,v) 链,则 G 含有子图 $(K\cup P) - e$,它是 K 的一个剖分图,从而是 K_5 或 $K_{3,3}$ 的剖分图,但这与假设矛盾. □

定理7.3.6(Kuratowski,1930) 一个图是平面图,当且仅当它不含 K_5 或 $K_{3,3}$ 的剖分图.

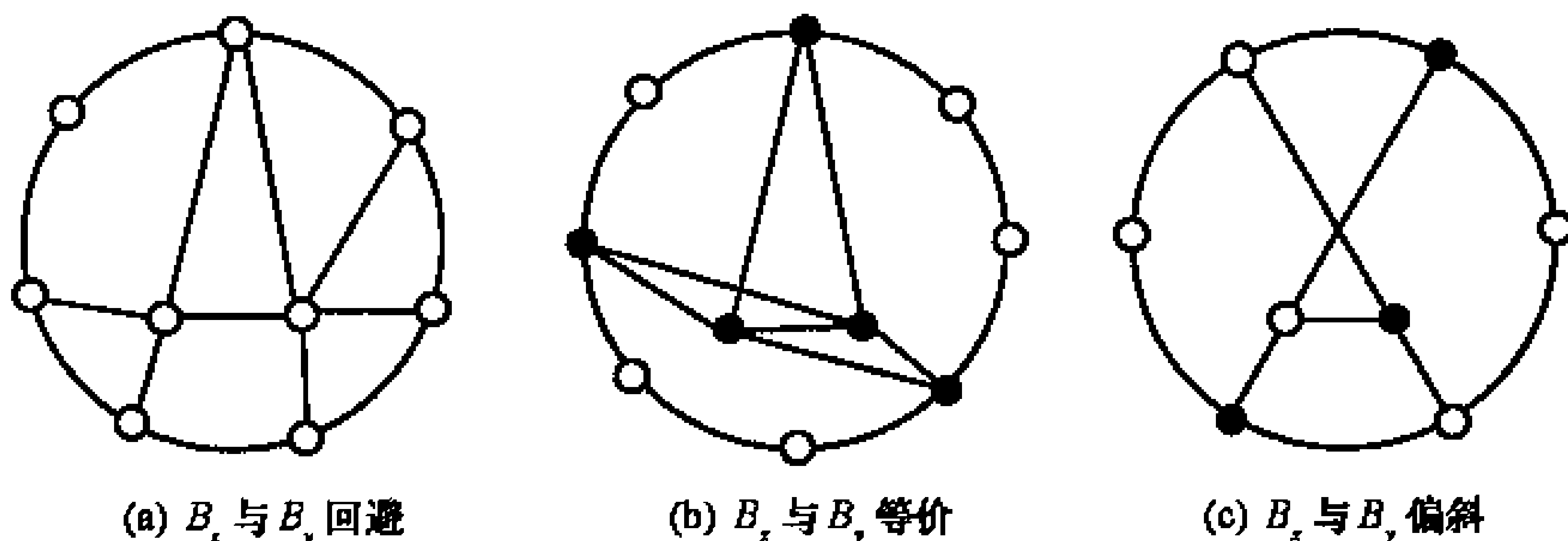
证明 只需证明充分性.由引理7.3.5可知,使充分性不成立的边数最少的反例必是3连通简单图.因此只需证明:若 G 是3连通简单图,且 G 不含 K_5 或 $K_{3,3}$ 的剖分图,则 G 有一个平面嵌入.

对 ν 进行归纳.当 $\nu\leqslant 4$ 时显然成立.假设所有顶点数 $<\nu$ 的3连通简单图,若不含 K_5 或 $K_{3,3}$ 的剖分图,则它是平面图.设 G 是 ν 阶3连通简单图,$\nu\geqslant 5$.根据定理3.2.6,G 中存在边 $e = xy$ 使 $G\cdot e$ 是3连通无环图.若 $G\cdot e$ 有 K_5 或 $K_{3,3}$ 的剖分图,则不难验证 G 也有.因此,$G\cdot e$ 不含 K_5 或 $K_{3,3}$ 的剖分图.设 G' 是 $G\cdot e$ 的基础简单图,则 G' 是3连通简单图,且不含 K_5 或 $K_{3,3}$ 的剖分图.因 $\nu(G') = \nu(G\cdot e) < \nu(G)$,故由归纳假设知,$G'$ 是平面图,从而 $G\cdot e$ 是平面图.设 H 是 $G\cdot e$ 的一个平面嵌入,令 z 是收缩边 e 得到的新顶点,则 $H - z$ 是2连通无环图,于是,它的每个面的边界都是圈.

容易知道,$H - z$ 中存在一个面 f,使得 H 中顶点 z 在 f 的内部.设圈 C 是面 f 的边界,则 $N_H(z)\subseteq V(C)$,从而 $N_{G\cdot e}(x)\subseteq V(C)$,$N_{G\cdot e}(y)\subseteq V(C)$.在 $G\cdot e$

中，存在惟一的 C 分枝 B_x 包含 x，存在惟一的 C 分枝 B_y 包含 y．若 B_x 与 B_y 回避，则在 $H-z$ 中添加顶点 x,y 及其关联的边，就可得到 G 的一个平面嵌入（图 7.3.2(a)）．若 B_x 与 B_y 重叠，由引理 7.3.3 得，B_x 与 B_y 或者是 3 等价的，或者是偏斜的．易知，当 B_x 与 B_y 是 3 等价的，G 含有 K_5 的剖分图（图 7.3.2(b)）；当 B_x 与 B_y 是偏斜的，G 含有 $K_{3,3}$ 的剖分图（图 7.3.2(c)）．这都与假设条件相矛盾．

□



(a) B_x 与 B_y 回避　(b) B_x 与 B_y 等价　(c) B_x 与 B_y 偏斜

图 7.3.2　B_x 与 B_y 的关系

下面再研究外平面图的特征．

由引理 7.3.1 和引理 7.3.2 可知，外平面图必不含 K_4 或 $K_{2,3}$ 的剖分图．下面的定理说明它的逆命题也成立．

定理 7.3.7　图 G 是外平面图，当且仅当 G 不含 K_4 或 $K_{2,3}$ 的剖分图．

证明　只需证明充分性．用反证法．设 G 不是外平面图，且不含 K_4 或 $K_{2,3}$ 的剖分图，并且有尽可能少的边数，则 G 是简单连通图．用引理 7.3.5 中类似的方法可以证明 $\kappa(G)\geqslant 2$．从而 G 中任何两个顶点都在一个圈上．设 C 为 G 的最长圈，则 C 的长至少为 4，否则 $G=K_3$，此与 G 不是外平面图矛盾．

我们断言：C 是 G 的 Hamilton 圈，若不然，取 $v_1\notin V(C)$，使 v_1 与 C 上一点 u_1 相邻．因 G 是 2 连通的，故 $G-u_1$ 中存在 (v_1,u_2) 链 P，使 $u_2\in V(C)$，且 $V(C)\cap V(P)=\{u_2\}$．因为 C 的长至少为 4，所以存在 v_2,v_3，使 $v_2u_1,u_1v_3\in E(C)$．而 C 是最长圈，故 $u_2\neq v_2,v_3$．于是 G 含有 $K_{2,3}$ 的剖分图，矛盾．

由于 G 不是外平面图，C 是 G 的 Hamilton 圈，因此，当把 G 的其他边画在 C 的内部时，至少有两条边 uv 和 xy 使其四个端点在 C 上出现的顺序为 u,x,v,y，于是 G 含有 K_4 的剖分图，矛盾．　□

7.4 四色问题

四色问题(four-colour problem) 一般叙述为:在任何一张地图上,是否能够只用四种颜色给各个国家染色,就能保证任意两个相邻国家都可以染上不同的颜色?四色问题作为一个数学问题应当是严谨的,因此需要给出"国家"和"相邻国家"的准确说法.首先,国家是指由一条或几条自身不相交的连续闭曲线围成的连通区域,即一个国家不允许有两块或两块以上互不毗邻的领土.其次,两国相邻是指它们的公共边界上至少包含一段连续曲线,所以,两个只在有限个点接壤的国家不算相邻.如果允许一个国家有两块或两块以上互不毗邻的领土(如图 7.4.1(a)),或者把只在有限个点接壤的两个国家算作相邻(如图 7.4.1(b)),则不能保证只用四种颜色对地图染色使得相邻国家的颜色不同,例如图 7.4.1(a) 需要 5 种颜色,图 7.4.1(b) 需要 8 种颜色.

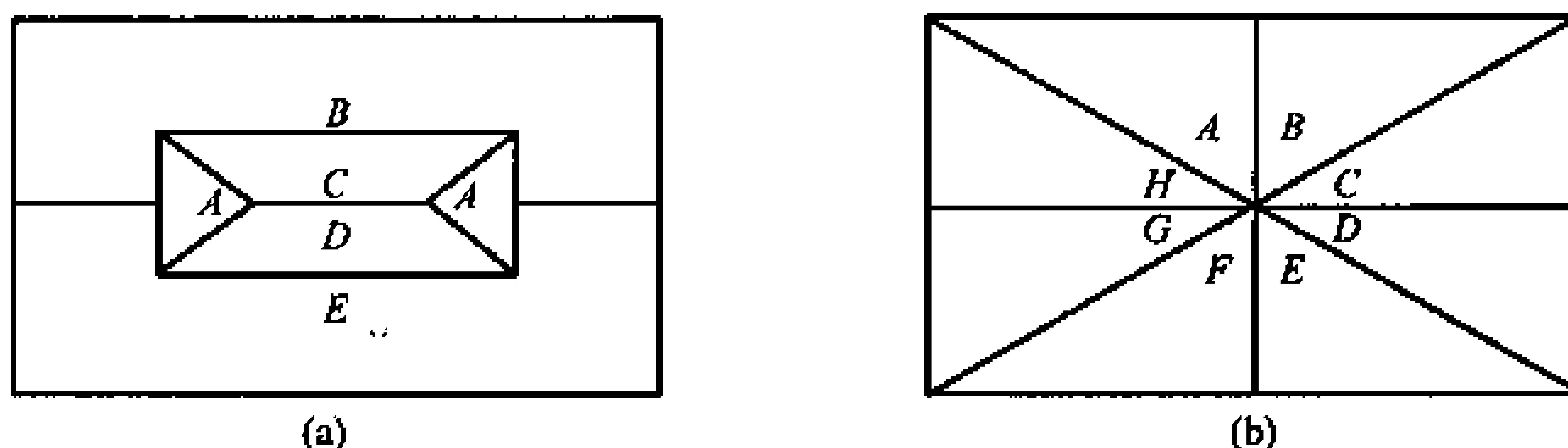


图 7.4.1　地图

最后还要约定地图上国家的数目是有限的.

如果把至少属于三个国家的边界上的点看做图的顶点,把连接两个顶点的两国的公共边界看成图的边,并且当一个国家被另一个国家完全包围时,就在其公共边界闭曲线上任取一点作为顶点,这样,地图就成为一个嵌入平面或球面的图.根据定理 7.1.2,不妨设地图是一个平图.此时,国家对应着平图的一个面;两个国家相邻,当且仅当平图上对应的两个面相邻.图 7.4.2 中地图有 10 个顶

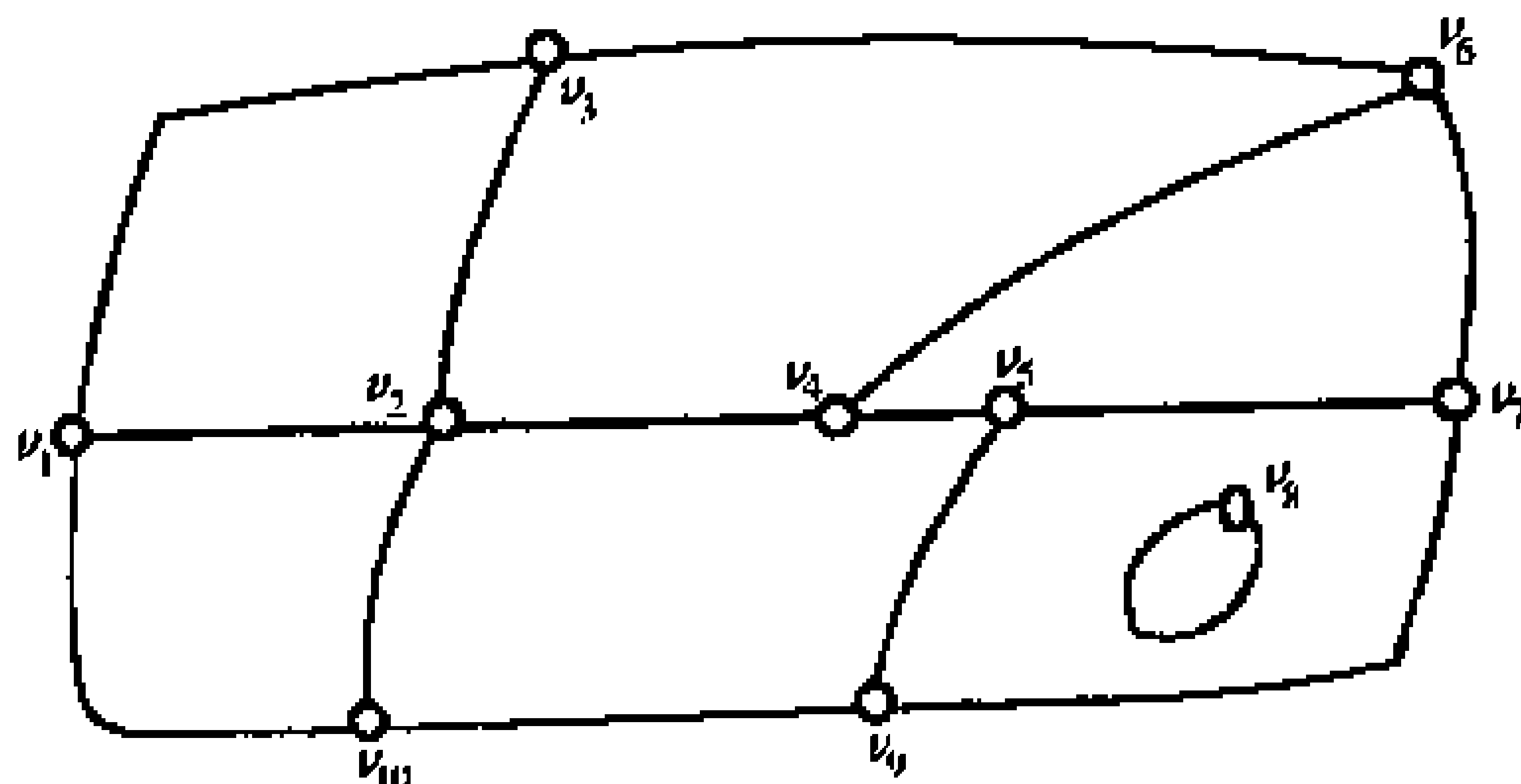


图 7.4.2　地图对应的平图

点;有 14 条边,其中的一条边是环;有 8 个面.

值得注意的是,因为地图上一条边界的两侧总是不同的国家,所以地图对应的平图没有割边.于是,可以这样陈述四色问题:是否能用四种颜色给任意一个无割边的平图的面染色,使得任何相邻的面的颜色不同.

对于一个平图 G,如果能够把每个面染以给定的 k 种不同颜色中的一种,使得任意相邻的两个面的颜色不同,则称这种染法为正常的 k 面着色(proper k-face coloring),简称为 k 面着色(k-face coloring),并称 G 是 k 面可着色的(k-face colorable).使得 G 是 k 面可着色的最小的 k 值称为 G 的面色数(face chromatic number),记作 $\chi^*(G)$.因此,四色问题又可叙述为:对于任何无割边的平图 G,是否总有 $\chi^*(G) \leqslant 4$?

因为无割边的平图 G 的对偶图 G^* 是无环平面图,并且 G 的面与 G^* 的顶点一一对应,G 中两个不同的面是否相邻,对应于 G^* 中两个不同的顶点是否相邻,所以 $\chi^*(G) = \chi(G^*)$.显然,G^* 的基础简单图 G' 满足 $\chi(G') = \chi(G^*)$,从而四色问题等价于对于简单平面图 G 是否总有 $\chi(G) \leqslant 4$?

四色问题是 Francis Guthrie 于 1852 年在和他弟弟 Fredrick Guthrie 的通信中提出的,当然,也有报告说 Möbius 在 1840 年就已熟悉这个问题,但肯定是由 Fredrick 转告给他的老师 De Morgan 的.Morgan 与朋友通信中讨论过这个问题,但不能证明也无法否定.引起数学界广泛关注是在 1878 年 Cayley 发表一篇《论地图着色》的文章之后.Kempe 和 Tait 分别在 1879 年和 1880 年著文声称证明了四色问题.但在 1890 年,Heawood 指出了 Kempe 证明中的错误,并且利用 Kempe 的方法证明了五色定理.Tait 证明中的错误是 Petersen 于 1891 年指出的,不过他应用 Tait 的思想证明四色问题等价于:任何简单 2 边连通了正则平面图的边色数为 3.直到 1976 年,美国人 Appel 和 Haken 在 Koch 的协助下,借助于电子计算机对这个一百多年悬而未决的数学难题给出了一个异常繁冗的证明,他们进行上百亿次逻辑判断,耗费一千多个机时,证明了每个简单平面图都是 4 可着色的.人们把这个结果称为四色定理(four-color theorem).但是,给出四色定理的一个无需借助计算机的证明,仍然是一个没有解决的问题.

虽然四色定理的证明十分困难,但是下面的五色定理的证明却非常简单.

定理 7.4.1(Heawood, 1890)　每个简单平面图都是 5 可着色的.

证明　因为任何平面图都有平面嵌入,所以只需证明:任何简单平图都是 5 可着色的.对顶点数 ν 进行归纳.$\nu \leqslant 5$ 时定理成立.设 G 是 ν 阶简单平图,$\nu \geqslant 6$.假设任何阶数小于 ν 的简单平图都是 5 可着色的.令 $d_G(v) = \delta(G)$.由归纳假设,$\nu - 1$ 阶简单平图 $H = G - v$ 是 5 可着色的.若 $d_G(v) \leqslant 4$,则对 H 的任何 5 着色,$N_G(v)$ 中顶点最多使用 5 种颜色中的 4 种,用余下的一种染 v,就得 G 的 5

着色. 下设 $d_G(v) \geqslant 5$. 根据推论 7.2.6, $\delta(G) \leqslant 5$. 从而 $d_G(v) = 5$, 设 $N_G(v) = \{v_1, \cdots, v_5\}$.

设 $(V_1, \cdots, V_5)$ 是 H 的一个 5 着色, 若存在某个 $1 \leqslant i \leqslant 5$ 使 $V_i \cap N_G(v) = \emptyset$, 则只要用颜色ⓘ染 v 就得到 G 的 5 着色. 故可设 $\forall 1 \leqslant i \leqslant 5, V_i \cap N_G(v) \neq \emptyset$, 即 $N_G(v)$ 中顶点的颜色各不相同, 不妨设 $v_i \in V_i (i = 1, \cdots, 5)$. 考虑 $G_{ij} = H[V_i \cup V_j], 1 \leqslant i < j \leqslant 5$. 如果存在 $1 \leqslant p < q \leqslant 5$, 使 v_p 与 v_q 不属于 G_{pq} 的同一连通分支, 则把 v_p 所在的连通分支中颜色ⓟ, ⓠ对换, 所得到的仍是 H 的一个 5 着色, 经过颜色对换后, v_p 就染成了与 v_q 相同的颜色ⓠ. 因此 $N_G(v)$ 中顶点没有用到颜色ⓟ. 用ⓟ染 v 就得到 G 的一个 5 着色. 如果 $\forall 1 \leqslant i < j \leqslant 5$, v_i 与 v_j 属于 G_{ij} 的同一连通分支, 则 H 中必有一条 (v_i, v_j) 链 P_{ij}, 使 P_{ij} 上顶点的颜色为ⓘ或 ⓙ. 考虑链 P_{13} 和 P_{24} (见图 7.4.3). 因 H 是平图, 故 P_{13} 和 P_{24} 必有公共顶点 u, 作为 P_{13} 上的顶点, u 要染 ① 或 ③; 同时, 作为 P_{24} 上的顶点, u 又应当染 ② 或 ④, 这是一对矛盾. □

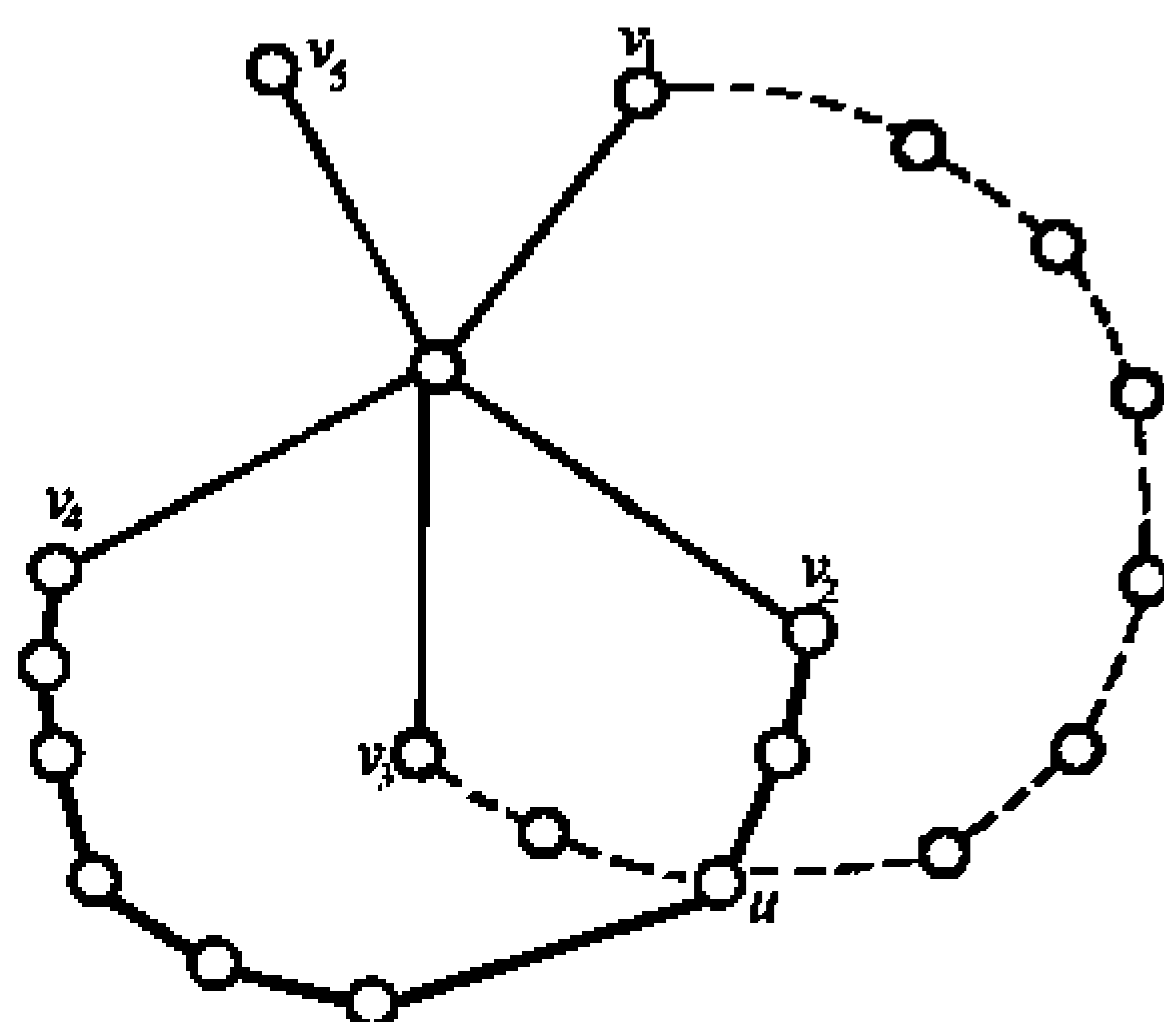


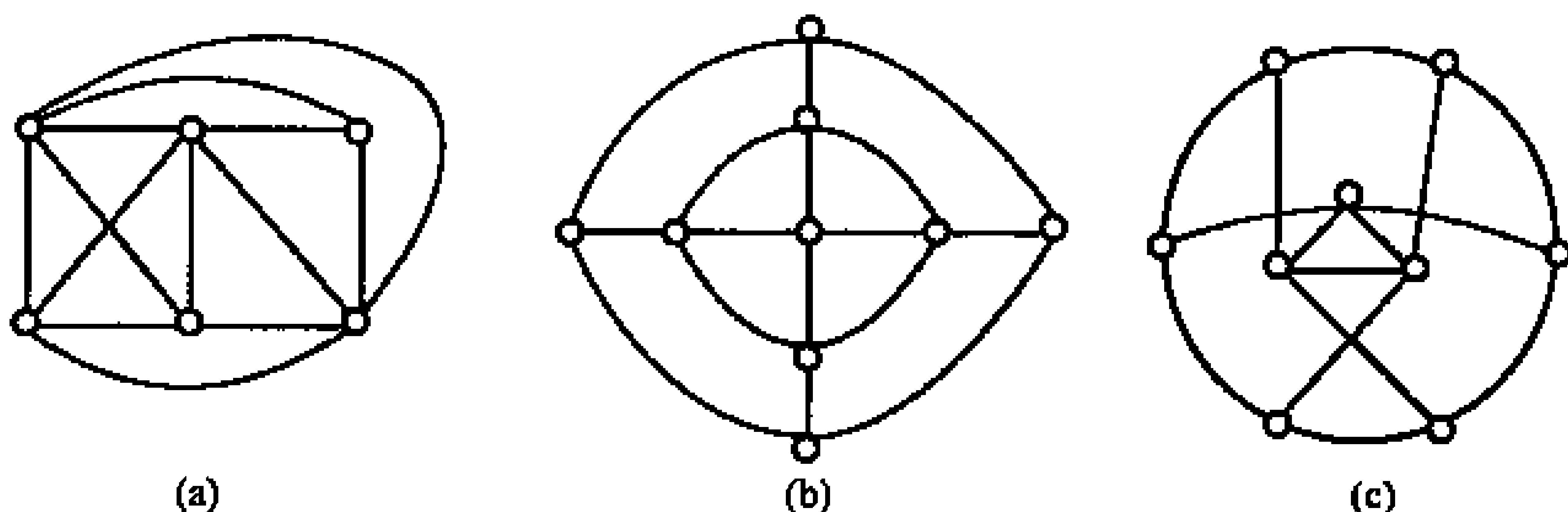
图 7.4.3 定理 7.4.1 的证明图示

习题七

1. 判断题图 7.1 中各图是否为平面图, 并说明理由.

2. (1) 给出一个 8 阶简单图, 使得它和它的补图都是平面图.

(2) 证明: 若 G 是阶大于 10 的简单图, 则 G 和它的补图 $\overline{G}$ 不可能都是平面图. (实际上, 可以证明阶大于 8 的简单图就有类似的结论.)



题图 7.1

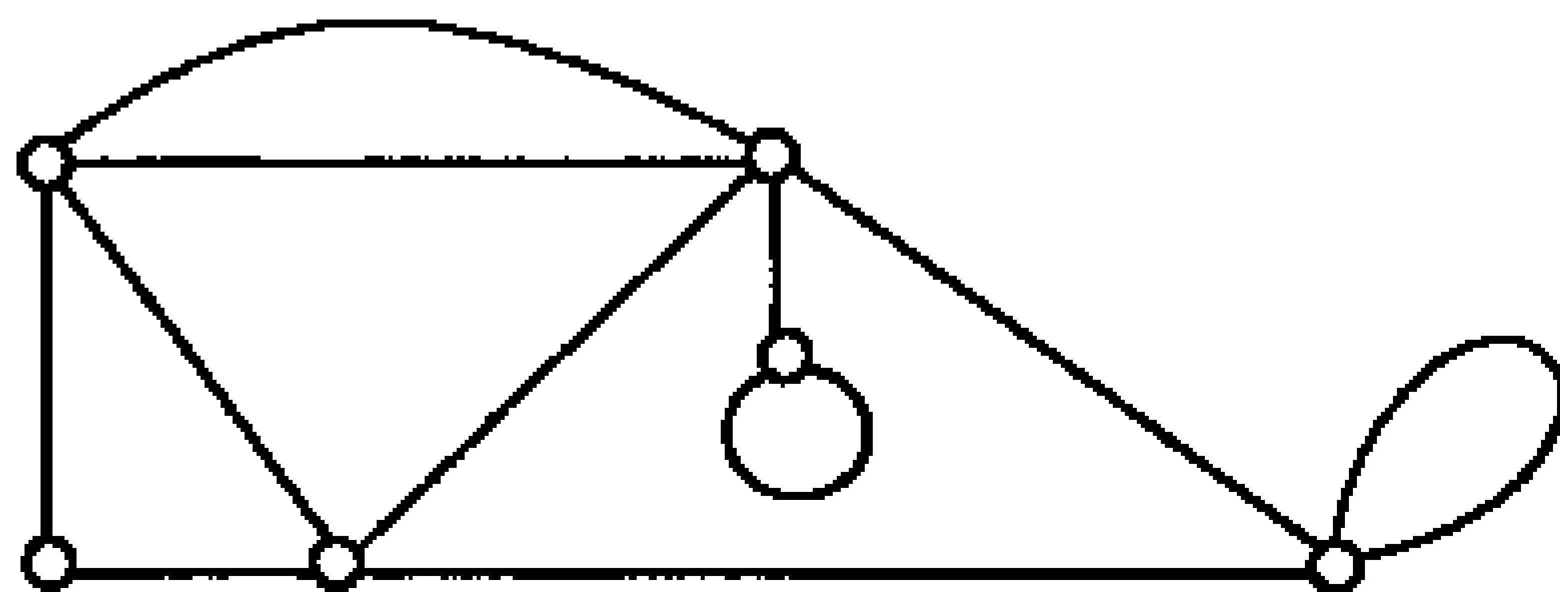
(3) 证明：当 $\nu(G) \geqslant 7$ 时，简单图 G 及其补图 $\overline{G}$ 不可能都是外平面图.

3. (1) 是否存在这样的简单图：它的某个顶点的度大于其余顶点度的和？

(2) 是否存在这样的简单平图：它的某个面的度大于其余面的度的和？

(3) 试对简单平图加以适当的条件，使得它任意一个面的度不超过其余面的度的和.

4. 画出题图 7.2 的对偶图.



题图 7.2

5. (1) 证明一个图是平面图，当且仅当它的每一个块是平面图.

(2) 若去掉一个非平面图的任一条边就变成了平面图，则称这个非平面图为极小非平面图. 证明极小非平面图都是简单块.

6. 对于轮 W_n，验证 Euler 公式.

7. 设 G 是 $\nu(\nu \geqslant 4)$ 阶图，x_i 表示 G 中度为 i 的顶点数目，证明：

(1) 若 G 是极大平面图，则

$$3x_3 + 2x_4 + x_5 = x_7 + 2x_8 + \cdots + (\Delta - 6)x_\Delta + 12;$$

(2) 若 G 是树，则 $x_1 = x_3 + 2x_4 + 3x_5 + (\Delta - 2)x_\Delta + 2$.

8. 设 $S = \{x_1, \cdots, x_n\}$ 是平面上 n 个点的点集($n \geqslant 3$)，其中任何两点之间距离至少是 1，证明：最多有 $3n - 6$ 个点对，其距离恰好是 1.

9. 证明 Petersen 图不是平面图.

10. 设 G 是奇阶平图，证明：若 G 中有 Hamilton 圈，则 G 有偶数个奇度面.

11. 证明：

(1) 平图 G 是 2 面可着色的，当且仅当 G 是 Euler 图.

(2) 图 G 是 3 可着色的，当且仅当 G 是 Euler 图.

12. 如果图 G 可以表为 k 个平面图的并，但不能表为 $k-1$ 个平面图的并，则称 G 的厚度是 k，记为 $\theta(G)=k$. 易见 $\theta(G)=1 \Leftrightarrow G$ 是平面图. 证明：

(1) $\theta(G) \geqslant \lceil \frac{\varepsilon}{3\nu-6} \rceil$;

(2) $\theta(K_\nu) \geqslant \lceil \frac{\nu+7}{6} \rceil$（事实上，除了 $\nu=9,10$ 外，对于任意 ν 等式均成立）.

13. 一个图的叉数 $C(G)$ 是把 G 画在平面时相交边最少的对数. 易见 $C(G)=0 \Leftrightarrow G$ 是平面图. 求 $K_5, K_{3,3}, K_6$ 及 Petersen 图的叉数.

14. 证明：每个 Hamilton 平图都是 4 面可着色的.

第八章　有向图

有向图与图类似，也由顶点和边构成，只是有向图中的边是有方向的，因此，有向图可以用来描述非对称关系，并且有向图有许多不同于图的概念和理论．本章主要介绍有向图的强连通性、有向 Euler 图、路和回路．

8.1　有向图与强连通性

我们知道，在第一章定义的图中的边是顶点的无序对，即图所描述的顶点之间的关系是对称关系．但是，在现实中有许多关系是不对称的，例如，比赛中的胜负关系；公路网上的交通问题，必须弄清楚哪些道路是单行的，单行道上什么方向是允许通行的，这就需要对比赛图和交通图的每条边指定一个方向．由此可以抽象出有向图的概念．

一个有向图(directed graph;digraph)D 是指一个有序的三元组($V(D)$, $A(D)$, ψ_D)，这里 $V(D)\neq\emptyset$, $V(D)\cap A(D)=\emptyset$. $V(D)$ 称为 D 的顶点集，其中的元素称为 D 的顶点；$A(D)$ 称为 D 的弧集(arc set)，其中的元素称为 D 的弧(arc)；ψ_D 称为 D 的关联函数，它使 D 的每条弧对应于 D 的有序顶点对．

如果 a 为 D 的弧，且 $\psi_D(a)=(u,v)$，则称 a 连接 u 到 v；u 称为 a 的尾(tail)，v 称为 a 的头(head)．

有向图也可以用一个图形来表示，顶点用小圆圈表示，弧用从尾到头的标有箭头的线段表示．同样，顶点之间的关系由图形上代表弧的带有箭头的线惟一表示，而与图形上小圆圈的位置及线段的长短曲直无关，因此，也可以把有向图与它对应的图形等同起来．

为了简单起见，把 $\psi_D(a)=(u,v)$ 记作 $a=(u,v)$，把 $D=(V(D),A(D),\psi_D)$ 记作 $D=(V(D),A(D))$，这时，只需把 $A(D)$ 中弧用它的尾和头的有序对表示．例如图 8.1.1 所代表的有向图 $D=(V(D),A(D))$，其中

$V(D)=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6,v_7\}$,

$$A(D) = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_1, v_3), (v_2, v_2), (v_2, v_4), (v_4, v_3), (v_4, v_5), (v_5, v_6), (v_5, v_7), (v_7, v_5)\}.$$

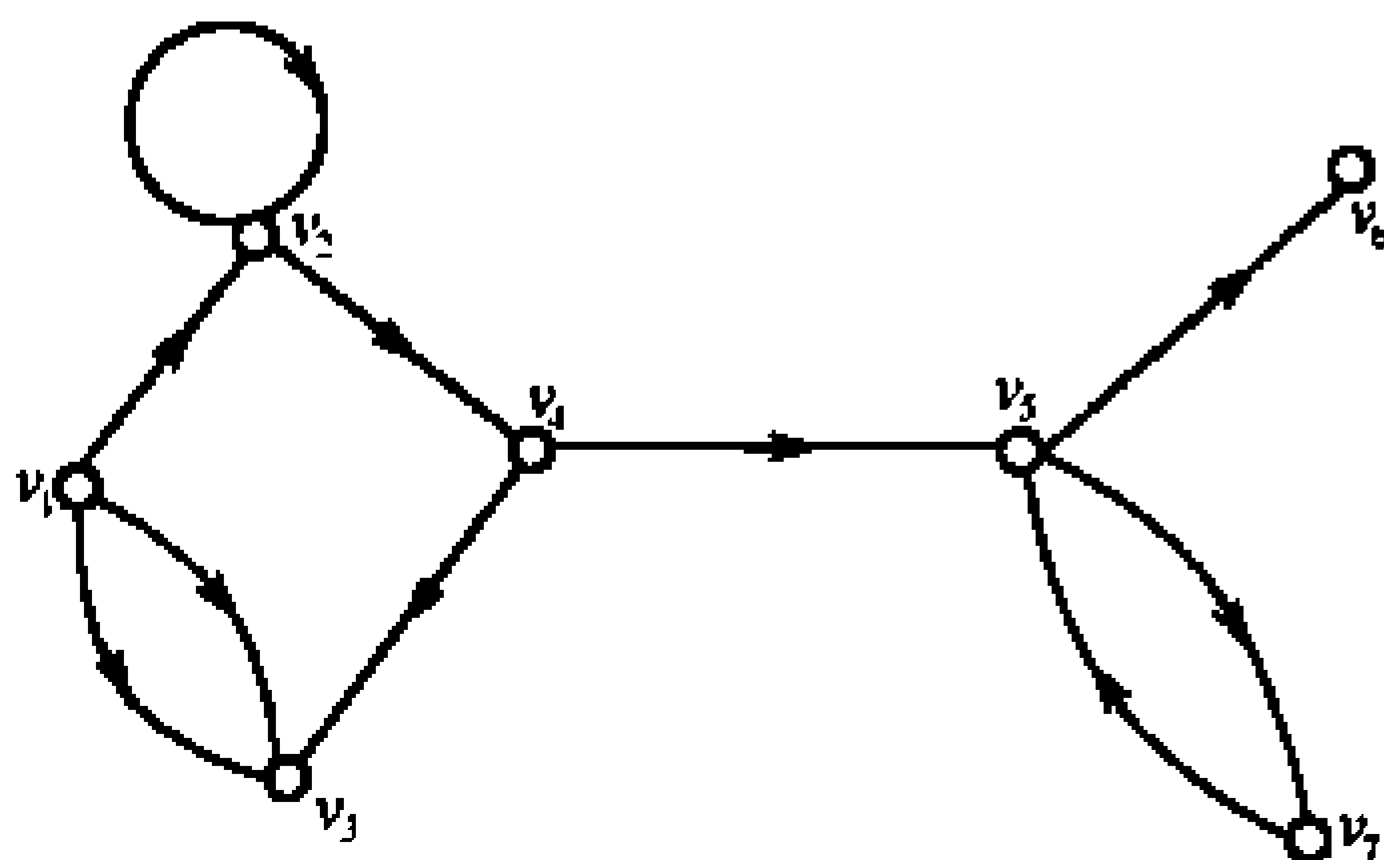


图 8.1.1 有向图 D

应当注意的是,在这种记号下,$A(D)$ 中有些元素是重复的,例如在图 8.1.1 所示的 D 的弧集$A(D)$ 中(v_1, v_3) 出现两次,这表明 D 中共有两条以v_1 为尾、v_3 为头的弧.

头和尾重合的弧称为环.若两条弧有相同的头和相同的尾,则称这两条弧为重弧(multiple arc).既没有环也没有重弧的有向图称为简单有向图(simple digraph).

如果把有向图 D 的每条弧上的箭头都去掉,亦即把每条弧(u, v) 用边 uv 来代替,这样得到的图称为 D 的基础图(underlying graph).反之,给定一个图 G,对 G 的每条边都规定一个方向,即把顶点的无序对按规定的顺序改为有序对,得到的有向图称为 G 的定向图(oriented graph).图 8.1.1 中有向图 D 的基础图G 见图 8.1.2,也可以把 D 看成是G 的定向图.

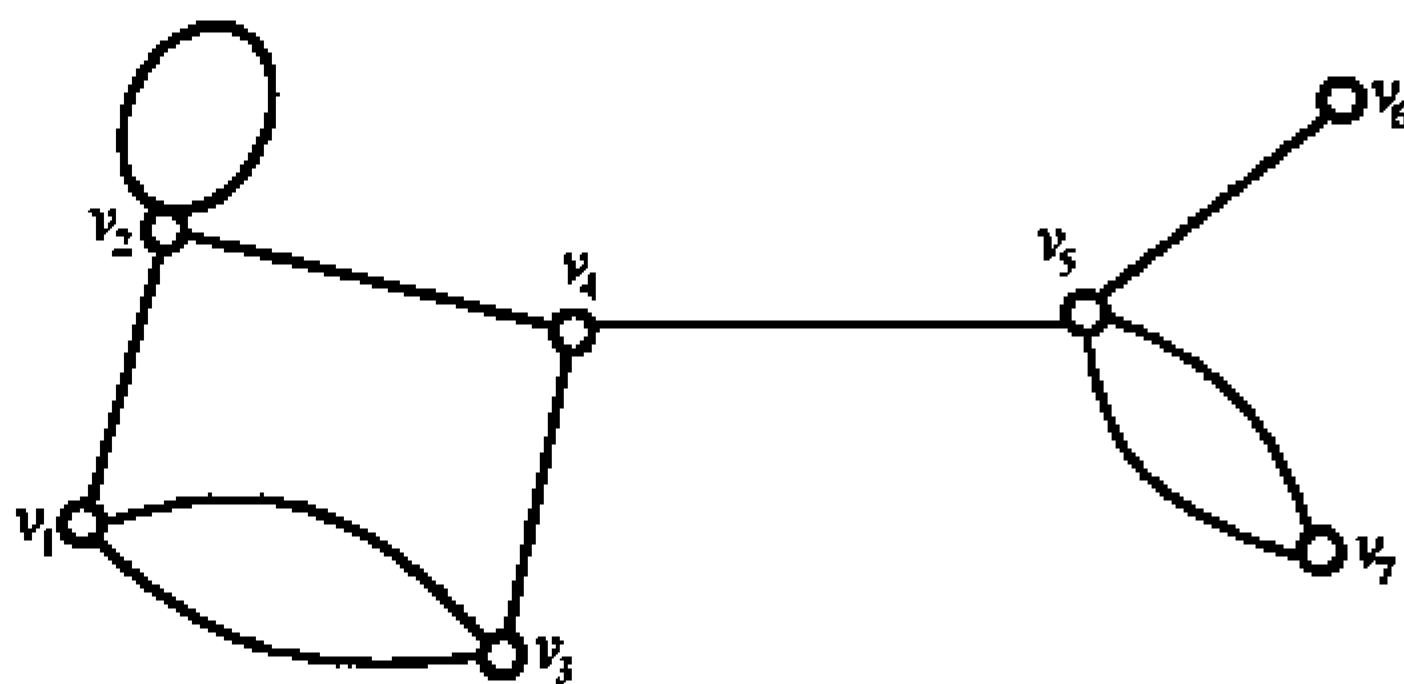


图 8.1.2 D 的基础图

利用有向图的基础图,图的每个概念均可自动地搬到有向图上来.例如,设 G 是D 的基础图.如果顶点 u 和v 在G 中相邻,则称 u 和v 在D 中相邻;如果 G 是连通图,则称 D 是连通有向图(connected digraph);D 中的圈是指D 中这样的一些顶点和弧构成的序列:使这些顶点和这些弧相对应的边构成 G 的圈.同图

的子图一样，可以定义有向图的子图.

由于在有向图中，"方向"是很重要的，因此下面介绍有向图中与方向有关的一些概念.

设 v 是有向图 D 的一个顶点，D 中以 v 为头的弧称为 v 的入弧(in-arc)；以 v 为尾的弧称为 v 的出弧(out-arc)；v 的入弧总数记为 $d_D^-(v)$，称为 v 的入度(in-degree)；v 的出弧总数记为 $d_D^+(v)$，称为 v 的出度(out-degree).我们用 $\delta^-(D)$，$\Delta^-(D)$ 和 $\delta^+(D)$，$\Delta^+(D)$ 分别表示 D 的最小入度(minimum in-degree)，最大入度(maximum in-degree) 和最小出度(minimum out-degree)、最大出度(maximum out-degree).仍用 $\nu(D)$，$\varepsilon(D)$ 表示有向图 D 的顶点数(阶数)和弧数.

与 1.1 节一样，我们有下面的定理：

定理 8.1.1　对于任何有向图 D，有

$$\sum_{v\in V(D)} d_D^-(v) = \sum_{v\in V(D)} d_D^+(v) = \varepsilon(D).$$

证明　因为 D 的每条弧对 D 中顶点的入度总和以及 D 中顶点的出度总和分别贡献 1，所以定理成立.　□

有向图 D 中的有向途径(directed walk)是指一个有限的非空序列 $W = v_0a_1v_1\cdots v_{k-1}a_kv_k$，其中的项交替地为 D 的顶点和弧，且 $a_i = (v_{i-1}, v_i)(1\leqslant i\leqslant k)$.$v_0$ 称为 W 的起点，v_k 称为 W 的终点，k 称为 W 的长.W 称为有向(v_0, v_k)途径.同图的途径一样，有向途径 $v_0a_1v_1\cdots v_{k-1}a_kv_k$ 常常简单地用顶点序列 $v_0v_1\cdots v_{k-1}v_k$ 表示.还可以类似地定义有向途径 W 的(v_i, v_j)节以及两条有向途径的衔接.有向迹(directed trail)是指弧互不相同的有向途径.有向闭途径、有向闭迹、有向链、有向圈等可以类似地定义.有向链又称为路(path)，有向圈又称为回路(circuit).

设 u 和 v 是有向图 D 中的两个顶点.若 D 中存在(u, v)路，则称可从 u 到达 v(reachable).若在 D 中既可从 u 到达 v 又可从 v 到达 u，则称 u 和 v 在 D 中是强连通的(strongly connected).强连通是 $V(D)$ 上的一个等价关系.强连通关系确定了 $V(D)$ 的非空分划 $V_1, \cdots, V_\omega$，它们在 D 中所导出的子图 $D[V_1], D[V_2], \cdots, D[V_\omega]$ 称为 D 的强连通分支(strong component).如果有向图 D 只有一个强连通分支，则称 D 是强连通的(strongly connected).显然，有向图 D 是强连通的，当且仅当 D 中任何两个顶点 u 和 v 之间既存在(u, v)路也存在(v, u)路.图 8.1.3 画出了一个有向图 D 及其强连通分支.

关于连通有向图与强连通有向图的差别，有以下直观的解释.设想有一个公路网接若干个城镇，并且每条公路都是单向行驶的.这时把公路网可以看成一个有向图 D，D 的顶点是各城镇，D 的弧是公路网中各条公路.D 连通相当于从任

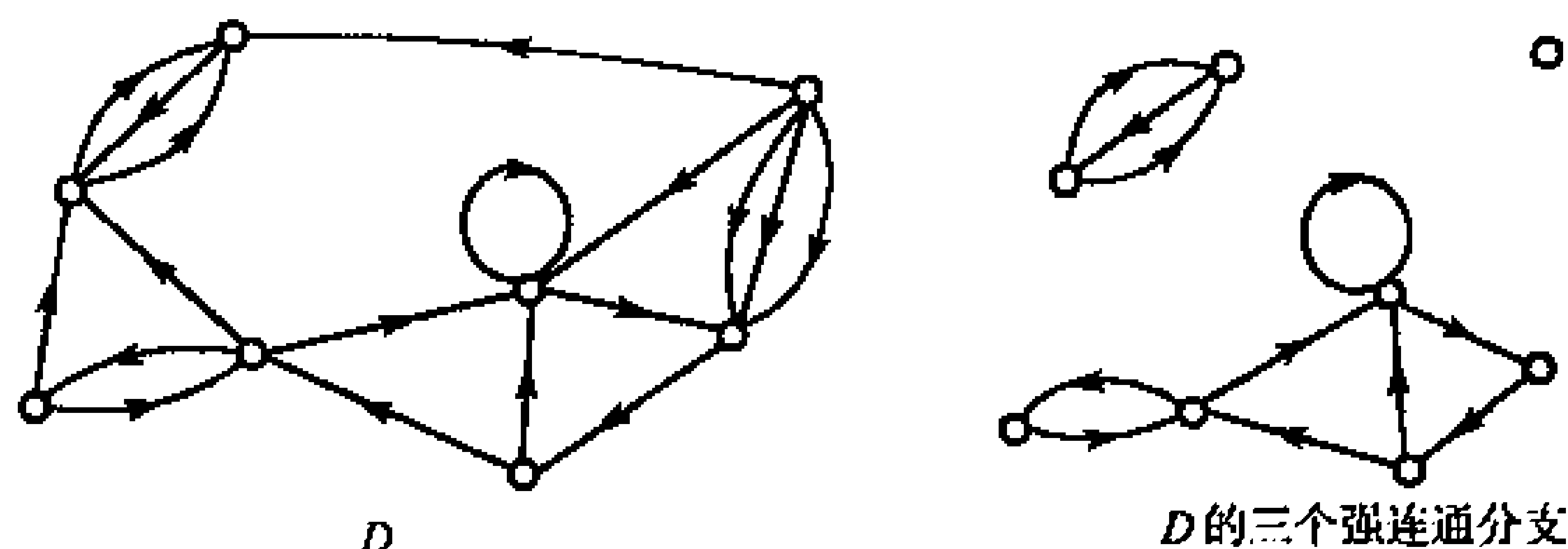


图 8.1.3 有向图及其强连通分支

一城镇出发，不管公路规定的行驶方向，可以驾车到达任一其他城镇. 而 D 强连通则等同于从任一城镇出发，严格按照规定的行驶方向，可以驱车到达任一其他城镇.

显而易见，一个单行的公路网应当是强连通的，否则严格遵守行驶规则不可能做到从任一城镇驾车到达其他所有城镇. 一个自然的问题：在什么情况下才能对一个公路网规定其单行方向，使得从任何城镇出发严格遵守规定的单行方向驾车到达任意的另一个城镇. 用图论的语言，上述问题又可叙述为：什么样的图有强连通的定向图?

显然，若图 G 有强连通定向图，则 G 是连通的. 并且易知，如果 G 有割边，则 G 肯定不存在强连通定向图. 那么我们会问：若 G 是不含割边的连通图，G 是否总有强连通定向图?下面的定理作了肯定的回答.

定理 8.1.2(Robbins, 1939) 设 G 是连通图，则 G 有强连通定向图，当且仅当 G 中没有割边.

证明 只需证明充分性. 设 G 是不含割边的连通图，若 G 是平凡图，显然 G 有强连通定向图. 下设 G 是非平凡图. 根据定理 2.2.2，G 含有圈 G_1，我们归纳定义 G 的连通子图 $G_1, G_2, \cdots$ 如下：若 $G_i\,(i = 1, 2, \cdots)$ 不是 G 的支撑子图，则由 G 的连通性知，存在 $u_i \in V(G) \setminus V(G_i)$ 和 $v_i \in V(G_i)$，使得 $e_i = u_iv_i \in E(G)$. 又因 G 没有割边，故 $G - e_i$ 连通，从而 $G - e_i$ 中存在 (u_i, v_i) 链 P_i，设 w_i 是 P_i 上第一个属于 $V(G_i)$ 的顶点，把 P_i 上的 (u_i, w_i) 节记为 Q_i，于是 $E(Q_i) \cap E(G_i) = \emptyset$，定义

$$G_{i+1} = G_i \cup \{e_i\} \cup Q_i, \ i = 1, 2, \cdots.$$

由于 $\nu(G_{i+1}) > \nu(G_i)$，因此序列 $G_1, G_2, \cdots$ 必定终止于 G 的一个支撑子图 G_n.

现在给 G_n 定向. 把 G_1 变成回路. 使 e_1 成为弧 (v_1, u_1)，(u_1, w_1) 链 Q_1 变成 (u_1, w_1) 路. 显然，按上述定向规则，G_1 的定向图是强连通的，从而 G_2 的定向图

也是强连通的.一般地,若 G_i 的定向图是强连通的,把 e_i 变成弧(v_i,u_i),(u_i,w_i)链 Q_i 变成(u_i,w_i)路,则 G_{i+1} 的这种定向图也是强连通的,$i=1,2,\cdots,n-1$.因此 G_n 的这种强连通定向图是 G 的支持子图的强连通定向图.最后把 $E(G)\setminus E(G_n)$ 中的边任意定向,就得到 G 的强连通定向图. □

下面我们给出强连通有向图的特征性刻画,为此先定义一个记号.

设 $D=(V,A)$ 是有向图,$\forall S,T\subseteq V$ 定义

$$(S,T)=\{(u,v)\in A\mid u\in S,v\in T\}.$$

显然,$\forall S\subset V,S\neq\emptyset$ 有

$$[S,\overline{S}]=(S,\overline{S})\cup(\overline{S},S),(S,\overline{S})\cap(\overline{S},S)=\emptyset,$$

即$(S,\overline{S})$,$(\overline{S},S)$是$[S,\overline{S}]$的一个分划.

定理 8.1.3　设 $D=(V,A)$ 是 $\nu\geqslant 2$ 的有向图,则下列命题等价:

(1) D 是强连通的;

(2) D 是连通的,且 D 的每条弧都在一个回路上;

(3) $\forall S\subset V,S\neq\emptyset$ 有$(S,\overline{S})\neq\emptyset$,$(\overline{S},S)\neq\emptyset$.

证明

(1)⇒(2) 显然.

(2)⇒(3) 设 $S\subset V,S\neq\emptyset$.因为 D 是连通有向图,所以$[S,\overline{S}]\neq\emptyset$,从而由$[S,\overline{S}]=(S,\overline{S})\cup(\overline{S},S)$知,必有 $a\in(S,\overline{S})$ 或 $a\in(\overline{S},S)$,由(2)可知 a 必在 D 的某个回路上,于是必有 $b\in(\overline{S},S)$ 或 $b\in(S,\overline{S})$.这说明:$(S,\overline{S})\neq\emptyset$,$(\overline{S},S)\neq\emptyset$.

(3)⇒(1) 假若 D 不是强连通的,则存在 $v_1,v_2\in V$,使 D 中不存在(v_1,v_2)路.令 $S=\{v\in V\mid D$ 中存在(v_1,v)路$\}$,则 $v_2\in\overline{S}$,且$(S,\overline{S})=\emptyset$,此与(3)矛盾. □

推论 8.1.4　设 D 是简单有向图,且

$$d_D^+(u)+d_D^-(v)\geqslant\nu-1,\ \forall(u,v)\notin A(D),u\neq v,$$

则 D 是强连通的.

证明　当 $\nu=1$ 时,D 显然是强连通的.下面用反证法证明 $\nu\geqslant 2$ 时 D 也是强连通的.若不然,由定理8.1.3知,存在 $S\subset V(D),S\neq\emptyset$,使$(S,\overline{S})=\emptyset$.从而取 $u\in S,v\in\overline{S}$,则$(u,v)\notin A(D)$.因此,由 D 是简单有向图可知

$$d_D^+(u)\leqslant|S|-1,\ d_D^-(v)\leqslant|\overline{S}|-1=\nu-|S|-1,$$

于是 $d_D^+(u)+d_D^-(v)\leqslant\nu-2<\nu-1$,此与条件矛盾. □

8.2　有向 Euler 图

把 Euler 图的概念推广到有向图中,就得有向 Euler 图的概念.

如果有向图 D 中存在包含所有弧的有向闭迹，则称 D 为有向 Euler 图(Euler digraph)，而这样的有向闭迹称为 D 的有向 Euler 闭迹(directed Euler closed trail). 如果有向图 D 中存在包含所有弧的有向迹，则称 D 为有向半 Euler 图(semi-Euler digraph)，这样的有向迹称为 D 的有向 Euler 迹(directed Euler trail).

关于有向 Euler 图的存在性，也有一个很好的特征性描述.

定理 8.2.1 设 D 是非空连通有向图，则下面三个命题等价：

(1) D 是有向 Euler 图；

(2) $\forall v \in V(D), d^+(v) = d^-(v)$；

(3) D 可以表示为弧不交的回路的并. □

该定理的证明与定理 3.3.1 的证明完全类似，由读者自己去完成.

根据定理 8.2.1，可以得到有向半 Euler 图的一个充要条件.

推论 8.2.2 连通有向图 D 是有向半 Euler 图，而非有向 Euler 图，当且仅当下面两个条件同时成立：

(1) 存在 $x, y \in V(D)$，使 $d^+(x) - d^-(x) = d^-(y) - d^+(y) = 1$；

(2) $\forall v \in V(D) \setminus \{x, y\}$，有 $d^+(v) = d^-(v)$.

证明

($\Rightarrow$) 设 D 是有向半 Euler 图，但非有向 Euler 图，则 D 中存在有向 Euler 迹 P. 设 P 的起点为 x，终点为 y，从而 $x \neq y$. 于是 $\forall v \in V(D) \setminus \{x, y\} = V(P) \setminus \{x, y\}$，$v$ 是 P 的内部点，每出现一次必与两条弧关联，一条为 v 的入弧，另一条为 v 的出弧，故 $d^-(v) = d^+(v)$. 对于起点 x，显然有 $d^+(x) - d^-(x) = 1$；对于终点 y，显然有 $d^-(y) - d^+(y) = 1$，这就证明了(1)和(2)都成立.

($\Leftarrow$) 设连通有向图 D 满足条件(1)和(2)，则在 D 中添加一条弧 (y, x)，记所得之图为 D'. 显然 D' 是非空连通有向图，且满足定理 8.2.1 的(2)，从而 D' 中存在有向 Euler 闭迹 C，于是 $C - (y, x)$ 就是 D 中的有向 Euler 迹，$x \neq y$. 因此 D 为有向半 Euler 图但不是有向 Euler 图. □

8.3 路

在有向图中，最长链的长与最长路的长有时会相差很大. 例如，在图 8.3.1 中，最长链的长为 10，但最长路的长为 1.

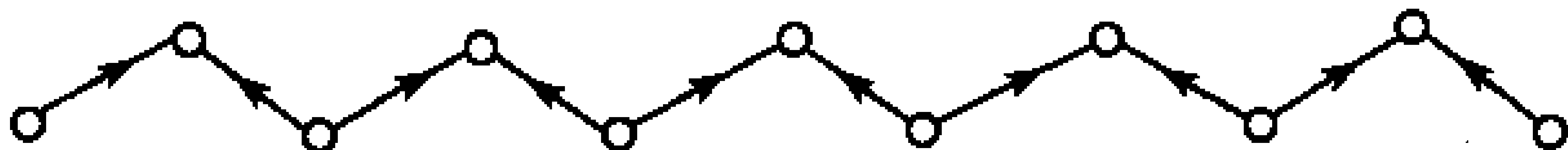


图 8.3.1 最长链与最长路的区别

令人吃惊的是，有向图中最长路的长与它的色数密切相关.

定理 8.3.1(Roy,1967;Gallai,1968)　无环有向图 D 中最长路的长至少为 $\chi(D)-1$.

证明　设 A' 是 D 中使 $D'=D-A'$ 不含回路的极小弧集，并假设 D' 中最长路的长为 k. 现在用颜色 $1,2,\cdots,k+1$ 染 D' 的顶点：当 D' 中以 v 为起点的最长路的长为 $i-1$ 时，就将 v 染颜色ⓘ因为以 v 为起点的最长路的长是确定的，所以 v 的颜色ⓘ是惟一确定的. 用 V_i 表示 D 中颜色为ⓘ的顶点的集合，$i=1,2,\cdots,k+1$. 我们将证明 $(V_1,V_2,\cdots,V_{k+1})$ 是 D 的 $k+1$ 顶点着色.

首先注意到，D' 中任何长为正的路的起点和终点的颜色不同. 因为，若 P 是 D' 中一条长为正的 (u,v) 路，设 $v\in V_i$，则存在 D' 中一条路 $Q=v_1v_2\cdots v_i$，这里 $v_1=v$. 由于 D' 不含回路，因此 PQ 是 D' 中以 u 为起点的长至少是 i 的路，故 $u\notin V_i$.

现在证明 D 中每条弧的端点的颜色不同. 设 $(u,v)\in A(D)$，若 $(u,v)\in A(D')$，则 (u,v) 是 D' 中的路，故 u,v 有不同的颜色；若 $(u,v)\in A'$，则由 A' 的极小性知，$D'+(u,v)$ 含有回路 C，于是 $C-(u,v)$ 是 D' 中的 (v,u) 路，从而 u，v 的颜色不同.

这样，$(V_1,V_2,\cdots,V_{k+1})$ 是 D 的 $k+1$ 着色，因此 $\chi(D)\leqslant k+1$，所以 D' 中最长路的长 $k\geqslant\chi(D)-1$，从而 D 中最长路的长 $\geqslant\chi(D)-1$. □

推论 8.3.2　任何无环图 G 都有一个定向图 D，D 中最长路的长等于

$$\chi(G)-1.$$

证明　给定图 G 的一个 $\chi(G)$ 着色 $(V_1,V_2,\cdots,V_{\chi(G)})$，把 G 按下述方法定向：如果 $uv\in E(G)$，且 $u\in V_i,v\in V_j,i<j$，则把边 uv 改为弧 (u,v)，得到 G 的定向图 D. 由此不难知道，D 中每条路上任何两个相异顶点的颜色都不相同，所以 D 中任何路的长 $\leqslant\chi(G)-1$；又由定理8.3.1知，D 中最长路的长 $\geqslant\chi(G)-1$，因此 D 中最长路的长为 $\chi(G)-1$. □

任何两个顶点之间都恰有一条弧相连的无环有向图称为竞赛图(tournament)，即竞赛图就是完全图的定向图.

ν 阶竞赛图可以看成有 ν 个运动员参加的单循环赛的比赛结果的表示图：运动员对应于图的顶点，运动员 v_i 战胜运动员 v_j 对应于图中的弧 (v_i,v_j)，这就是把完全图的定向图称为竞赛图的原因.

同样可以把 Hamilton 图的概念推广到有向图中来.

如果有向图 D 中存在包含所有顶点的回路，则称 D 为有向 Hamilton 图(directed Hamilton graph)，这样的回路称为 D 的 Hamilton 回路(Hamilton circuit).

如果有向图 D 中存在包含所有顶点的路,则称 D 为有向半 Hamilton 图(directed semi-Hamilton graph),这样的路称为 D 的 Hamilton 路(Hamilton path).

因为竞赛图 D 满足 $\chi(D)=\nu(D)$,所以由定理 8.3.1 知,D 中存在长为 $\nu(D)-1$ 的路,即 Hamilton 路.因此我们得到下面的推论.

推论 8.3.3(Rédei,1934) 任何竞赛图都是有向半 Hamilton 图. □

下面再给出竞赛图的另一个有趣的结论,为此先介绍两个概念和一个定理.

设 D 是有向图,$v\in V(D)$,称

$$N_D^-(v)=\{u\in V(D)\mid (u,v)\in A(D)\}$$

为 v 在 D 中的入邻域(in-neighbour),称

$$N_D^+(v)=\{u\in V(D)\mid (v,u)\in A(D)\}$$

为 v 在 D 中的出邻域(out-neighbour).

定理 8.3.4(Chvàtal, Lovàsz,1974) 无环有向图 D 中总存在一个独立集 S,使得 $V(D)\setminus S$ 中每个顶点都可以从 S 的顶点出发,经过长最多为 2 的路到达.

证明 对顶点数 ν 进行归纳.$\nu=1$ 时定理显然成立.设 $\nu\geqslant 2$,假设对所有顶点数 $<\nu$ 的无环有向图,定理为真.设 D 为 ν 阶无环有向图,$v\in V(D)$.若 $V(D)=\{v\}\cup N_D^+(v)$,则取 $S=\{v\}$,此时 S 满足要求.而下设 $V(D)\neq\{v\}\cup N_D^+(v)$,根据归纳假设,$D'=D-(\{v\}\cup N_D^+(v))$ 中存在一个独立集 S',使得 $D'-S'$ 中每个顶点都可以从 S' 的一个顶点出发经过长至多为 2 的路到达.若存在 $u\in S'$,使 $(u,v)\in A(D)$,则 $N_D^+(v)$ 中顶点都可以从 u 出发经过长为 2 的路到达,此时取 $S=S'$ 即可;否则,$\forall u\in S'$,$(u,v)\notin A(D)$,则 $S'\cap N_D^-(v)=\emptyset$.又因 $S'\cap N_D^+(v)=\emptyset$,故 $S'\cap N_D(v)=\emptyset$,从而 $S'\cup\{v\}$ 是独立集,取 $S=S'\cup\{v\}$ 即可. □

推论 8.3.5 竞赛图总存在这样一个顶点,从该顶点出发,经过长至多为 2 的路到达其他任何顶点.

证明 设 D 为竞赛图,则 D 中无环且 D 的独立数为 1,从而由定理 8.3.4 即得. □

8.4 回路

虽然由推论 8.3.3 知,竞赛图含有 Hamilton 路,而且易知,$\nu\geqslant 3$ 的竞赛图中存在 Hamilton 圈,但是竞赛图中不一定存在 Hamilton 回路,这是因为竞赛图中可能存在出度为 0 或入度为 0 的顶点.不过,$\nu\geqslant 3$ 的强连通图中存在 Hamilton 回路.这一结论是 Moon(1966) 得到的下面的定理的特殊情形.

定理8.4.1(Moon,1966)　对任何满足$3\leqslant k\leqslant \nu$的整数$k$,阶$\nu\geqslant 3$的强连通竞赛图$D$的每个顶点都在$D$中某个$k$回路上.

证明　$\forall u\in V(D)$,记$S=N_D^+(u)$,$T=N_D^-(u)$,因D是竞赛图,故$V(D)=S\cup T\cup\{u\}$.又由于D是强连通的,且$\nu\geqslant 3$,因此由定理8.1.3知,$S\neq\emptyset$,$T\neq\emptyset$,$(S,T)\neq\emptyset$,即有弧$(v,w)\in(S,T)$,从而u在3回路$uvwu$上.

现在对k进行归纳.假设u包含在D的k回路$C=v_0v_1\cdots v_k$上,这里$v_0=v_k=u$,$3\leqslant k<\nu$,我们将证明D中存在$k+1$回路含有顶点u,分两种情况讨论.

(1)若存在$v\in V(D)\setminus V(C)$,使得$N_D^+(v)\cap V(C)\neq\emptyset$,$N_D^-(v)\cap V(C)\neq\emptyset$,则由$D$为竞赛图知,$v$与$V(C)$中每个顶点都有弧相连.令

$$i=\max\{j\mid 1\leqslant j\leqslant k,(v_j,v)\in A(D)\},$$

则$(v_i,v),(v,v_{i+1})\in A(D)$,因此$u$包含在$D$的$k+1$回路$v_0v_1\cdots v_ivv_{i+1}\cdots v_k$上.

(2)若情况(1)不出现,即$\forall v\in V(D)\setminus V(C)$,或者$N_D^+(D)\cap V(C)=\emptyset$,或者$N_D^-(v)\cap V(c)=\emptyset$,从而由$D$是竞赛图知,要么$v$与每个$v_j(1\leqslant j\leqslant k)$间有弧$(v_j,v)$,记这样的$v$的集合为$S$;要么$v$与每个$v_j(1\leqslant j\leqslant k)$间有弧$(v,v_j)$,记这样的$v$的集合为$T$.于是$S\cup T=V(D)\setminus V(C)$,$S\cap T=\emptyset$,又因$D$是强连通的,故由定理8.1.3知,$S\neq\emptyset$,$T\neq\emptyset$,$(S,T)\neq\emptyset$,即有弧$(v,w)\in(S,T)$,则$u$包含在$k+1$回路$v_0vwv_2\cdots v_k$上(见图8.4.1).　□

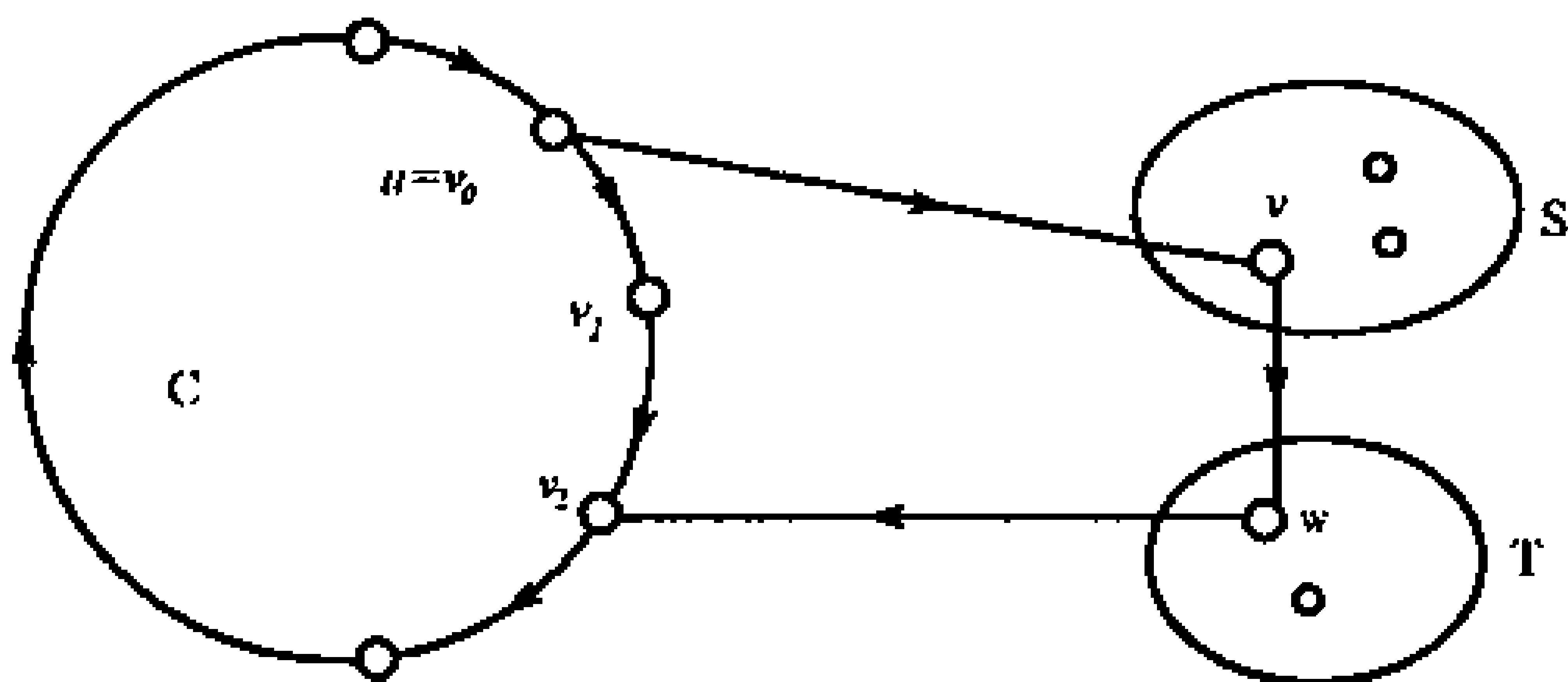


图8.4.1　u包含在$k+1$回路上

推论8.4.2　$\nu\geqslant 3$的竞赛图D是有向Hamilton图,当且仅当D是强连通的.

证明　若竞赛图D是有向Hamilton图,则D中存在Hamilton回路,从而D中任何两个顶点通过Hamilton回路可以互相到达,即D是强连通的.反之,若D是$\nu\geqslant 3$的强连通竞赛图,则由定理8.4.1知D中存在Hamilton回路,即D为有向Hamilton图.　□

我们知道,关于Hamilton图有Ore定理:如果阶$\nu\geqslant 3$的简单图G,对任何两

个不相邻的相异顶点 u 和 v 有 $d(u)+d(v)\geqslant\nu$，则 G 是 Hamilton 图. 同样，对有向 Hamilton 图，我们有下面类似的结论.

定理 8.4.3(Meyniel, 1973) 设 D 是阶 $\nu\geqslant 2$ 的强连通简单有向图. 若对任一对不相邻的相异顶点 u 和 v，有

$$d_D(u)+d_D(v)\geqslant 2\nu-1,$$

则 D 是有向 Hamilton 图.

为了证明这个定理，我们先介绍两个概念和两个引理.

设 D 是阶 $\nu\geqslant 2$ 的有向图，$S\subset V(D)$，$S\neq\varnothing$. 若 D 中存在长为正的 (u,v) 路 P，使 $S\cap V(P)=\{u,v\}$，则称 P 为 D 的 S 路；若 D 中存在一条长为正的回路 C，使 $|S\cap V(C)|=1$，则称 C 为 D 的 S 回路.

引理 8.4.4 设 D 为 $\nu\geqslant 2$ 的强连通有向图，$S\subset V$，$S\neq\varnothing$，则 D 中或者存在 S 路或者存在 S 回路.

证明 因为 D 是 $\nu\geqslant 2$ 的强连通有向图，所以由定理 8.1.3 有 $(v_1,v_2)\in(S,\overline{S})$，并且弧 (v_1,v_2) 在 D 的某个回路 C 上. 若 $S\cap V(C)$ 为单点集，则 C 是 D 的 S 回路；否则不妨设 v_1 为 C 的起点，并记从 v_2 以后 C 上第一个属于 S 的顶点为 u，则 C 的 (v_1,u) 节是 D 的 S 路. □

引理 8.4.5 设 $P=v_1v_2\cdots v_k$ 为简单有向图 D 中的路，$v\in V(D)\setminus V(P)$. 若 $\forall 1\leqslant i\leqslant k-1$，$v_1v_2\cdots v_ivv_{i+1}\cdots v_k$ 不是 D 中的路，则

$$|[\{v\},V(P)]|\leqslant|V(P)|+1.$$

证明 令

$$S_1=\{v_i\in V(P)\mid 1\leqslant i\leqslant k-1,(v_i,v)\in A(D)\},$$
$$S_2=\{v_i\in V(P)\mid 1\leqslant i\leqslant k-1,(v,v_{i+1})\in A(D)\},$$

则由假设知，$S_1\cap S_2=\varnothing$. 因 $S_1\cup S_2\subseteq V(P)\setminus\{v_k\}$，故 $|S_1\cup S_2|\leqslant|V(P)|-1$. 由于 D 为简单有向图，因此 v 与 v_k 间最多有两条弧，所以

$$|[\{v\},V(P)]|\leqslant|S_1|+|S_2|+2=|S_1\cup S_2|+2\leqslant|V(P)|+1.$$

□

下面用反证法证明定理 8.4.3.

假设 D 满足定理的条件，但 D 不是有向 Hamilton 图. 因 D 是强连通的，且阶 $\nu\geqslant 2$，故由定理 8.1.3 知，D 中含有回路. 设 $C=v_1v_2\cdots v_kv_1$ 是 D 中最长回路. 令 $S=V(C)$，则 S 为 $V(D)$ 的非空真子集. 分两种情况讨论.

(1) D 中不含 S 路

因 D 是阶 $\nu\geqslant 2$ 的强连通有向图，故由引理 8.4.4 知，D 中必含有 S 回路 $C'=v_pu_1\cdots u_lv_p$，其中 $\{v_p\}=S\cap V(C')$. 记 $T=\{u_1,\cdots,u_l\}$，则 $T\neq\varnothing$. 因为 D 中

不含 S 路，所以用反证法可以证明：$\forall 1 \leqslant i \leqslant k (i \neq p)$ 及 $1 \leqslant j \leqslant l$，$u_j$ 与 v_i 不相邻，即知

$$|[\{u_j\}, S \setminus \{v_p\}]| = 0, \quad |[\{v_i\}, T]| = 0,$$

从而由 D 是简单有向图知

$$|[\{u_j\}, S]| \leqslant 2,$$
$$|[\{u_j\}, T]| \leqslant 2(|T| - 1),$$
$$|[\{v_i\}, S]| \leqslant 2(|S| - 1).$$

又由于 D 中不含 S 路，因此对于上述的 u_j 和 v_i 及 $\forall u \in V(D) \setminus (S \cup T)$，$(v_i, u)$ 和 (u, u_j) 中至多有一条属于 $A(D)$，(u_j, u) 和 (u, v_i) 中也至多有一条属于 $A(D)$，于是

$$|[\{u_j\}, V(D) \setminus (S \cup T)]| + |[\{v_i\}, V(D) \setminus (S \cup T)]|$$
$$\leqslant 2|V(D) \setminus (S \cup T)| = 2(\nu - |S| - |T|).$$

从而

$$\begin{aligned} d_D(u_j) + d_D(v_i) &= |[\{u_j\}, S]| + |[\{u_j\}, T]| + |[\{u_j\}, V(D) \setminus (S \cup T)]| \\ &\quad + |[\{v_i\}, S]| + |[\{v_i\}, T]| + |[\{v_i\}, V(D) \setminus (S \cup T)]| \\ &\leqslant 2 + 2(|T| - 1) + 2(|S| - 1) + 2(\nu - |S| - |T|) \\ &= 2\nu - 2, \end{aligned}$$

此与定理的条件矛盾.

(2) D 中含 S 路

设 $P = v_p u_1 \cdots u_l v_{p+r}$ 是 D 中一条使 r 最小的 S 路（这里 $p + r$ 为模 k 的同余），其中 $\{v_p, v_{p+r}\} = S \cap V(P)$. 记 $T = \{u_1, \cdots, u_l\}$，则由 P 为 S 路知 $T \neq \emptyset$，又记 C 上的 (v_p, v_{p+r}) 节的内部顶点的集合为 S_1，则由 P 的选择知，T 中任何顶点都不与 S_1 中任何顶点相邻，因此，$\forall u_j \in T$，有

$$|[\{u_j\}, S_1]| = 0.$$

并且由 C 的最长性和引理 8.4.5 知，上述顶点 u_j 满足

$$|[\{u_j\}, S \setminus S_1]| \leqslant |S \setminus S_1| + 1 = |S| - |S_1| + 1,$$

从而

$$|[\{u_j\}, S]| \leqslant |S| - |S_1| + 1.$$

又因 D 是简单有向图，故

$$|[\{u_j\}, T]| \leqslant 2(|T| - 1).$$

设 P' 是 D 中一条其顶点集 S_2 满足 $S \setminus S_1 \subseteq S_2 \subseteq S$ 的最长 (v_{p+r}, v_p) 路. 由于 C 是 D 中最长回路，且 $T \neq \emptyset$，因此 S_2 是 S 的真子集，从而存在 $v_i \in S \setminus S_2$

$\subseteq S_1$.于是由 P' 的最长性和引理 8.4.5 有

$$|[\{v_i\},S_2]|\leqslant|S_2|+1.$$

又由 D 为简单有向图知

$$|[\{v_i\},S\setminus S_2]|\leqslant 2(|S\setminus S_2|-1)=2(|S|-|S_2|-1),$$

从而

$$|[\{v_i\},S]|\leqslant 2|S|-|S_2|-1.$$

因为 S_1 中任何顶点都不与 T 中任何顶点相邻,所以

$$|[\{v_i\},T]|=0.$$

根据 P 的选择及 C 的最长性,对于上述的 u_j 和 v_i 及 $\forall\, u\in V(D)\setminus(S\cup T)$,$(v_i,u)$ 和 (u,u_j) 中至多有一条属于 $A(D)$,(u_j,u) 和 (u,v_i) 中也至多有一条属于 $A(D)$,从而

$$\begin{aligned}&|[\{u_j\},V(D)\setminus(S\cup T)]|+|[\{v_i\},V(D)\setminus(S\cup T)]|\\ \leqslant\ &2|V(D)\setminus(S\cup T)|\\ =\ &2(\nu-|S|-|T|).\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}d_D(u_j)+d_D(v_i)=\ &|[\{u_j\},S]|+|[\{u_j\},T]|+|[\{u_j\},V(D)\setminus(S\cup T)]|\\ &+|[\{v_i\},S]|+|[\{v_i\},T]|+|[\{v_i\},V(D)\setminus(S\cup T)]|\\ \leqslant\ &|S|-|S_1|+1+2(|T|-1)+2|S|-|S_2|-1\\ &+2(\nu-|S|-|T|)\\ \leqslant\ &2\nu-2.\end{aligned}$$

此与定理的条件矛盾. □

根据定理 8.4.3,我们容易得下面一系列推论.

推论 8.4.6(Ghouila-Houri,1960) 设 D 是 $\nu\geqslant 2$ 的强连通简单有向图,若 $\forall\, v\in V(D)$,$d_D(v)\geqslant\nu$,则 D 是有向 Hamilton 图. □

推论 8.4.7 设 D 是 $\nu\geqslant 2$ 的简单有向图,且

$$d_D^+(u)+d_D^-(v)\geqslant\nu,\ \forall\,(u,v)\notin A(D),u\neq v,$$

则 D 是有向 Hamilton 图.

证明 根据推论的条件和推论 8.1.4 可知,D 是强连通的简单有向图.又因为对于 D 中任一对不相邻的相异顶点 u 和 v,有 $(u,v)\notin A(D)$,$(v,u)\notin A(D)$,所以

$$d_D^+(u)+d_D^-(v)\geqslant\nu,d_D^+(v)+d_D^-(u)\geqslant\nu.$$

于是

$$d_D(u)+d_D(v)\geqslant 2\nu>2\nu-1.$$

因此由定理 8.4.3 知，D 是有向 Hamilton 图．□

推论 8.4.8(Nash-Williams, 1960)　设 D 是 $\nu \geqslant 2$ 的简单有向图，且 $\min\{\delta^+, \delta^-\} \geqslant \nu/2$，则 D 是有向 Hamilton 图．

证明　这是推论 8.4.7 的直接推论．□

推论 8.4.9　设 D 是简单有向图，且对任一对不相邻的相异顶点 u 和 v，有

$$d_D(u) + d_D(v) \geqslant 2\nu - 3,$$

则 D 是有向半 Hamilton 图．

证明　在 D 中添加新顶点 v_0，且 $\forall v \in V(D)$，连两条弧 (v_0, v) 和 (v, v_0)，得到强连通简单有向图 D'，对于 D' 中任一对不相邻的相异顶点 u 和 v（它们在 D 中也不相邻），有

$$\begin{aligned} d_{D'}(u) + d_{D'}(v) &= d_D(u) + d_D(v) + 4 \\ &\geqslant 2\nu(D) - 3 + 4 = 2\nu(D') - 1, \end{aligned}$$

从而由定理 8.4.3 知，D' 中存在 Hamilton 回路 C，于是 $C - v_0$ 就是 D 中的 Hamilton 路．□

类似于有向 Hamilton 图，关于有向半 Hamilton 图有下列几个结论，并且这些结论均可由推论 8.4.9 立即推出．

推论 8.4.10　设 D 是简单有向图．若 $\forall v \in V(D)$，$d_D(v) \geqslant v - 1$，则 D 是有向半 Hamilton 图．□

推论 8.4.11　设 D 是简单有向图，且

$$d_D^+(u) + d_D^-(v) \geqslant \nu - 1,\ \forall (u, v) \notin A(D),\ u \neq v,$$

则 D 是有向半 Hamilton 图．□

推论 8.4.12　设 D 是简单有向图，且 $\min\{\delta^+, \delta^-\} \geqslant (\nu - 1)/2$，则 D 是有向半 Hamilton 图．□

顺便指出：关于 Hamilton 图的推论 3.3.9 和半 Hamilton 图的推论 3.3.11，可以分别由推论 8.4.7 和推论 8.4.11 立即得出．这是因为，只需要把简单图 G 的每条边 uv 改为两条弧 (u, v) 和 (v, u) 得到简单有向图 D 即可．

习 题 八

1. 问简单图 G 能有多少种定向？
2. 分别具体给出 $K_n\,(n \geqslant 3)$，$K_{m,n}\,(m, n \geqslant 2)$ 和 Petersen 图的强连通定向．

3. 设$f: V(D_1) \to V(D_2)$是有向图D_1和D_2的顶点集之间的双射，如果对于D_1的每一对顶点u和v，D_1中从u到v的弧的数目与D_2中从$f(u)$到$f(v)$的弧的数目相同，则称f是D_1和D_2间的一个同构对应。如果D_1和D_2间有同构对应，则称D_1和D_2同构。把有向图D的每一条弧的方向都倒过来得到的图称为D的逆向图，记作$\overleftarrow{D}$。试求一个有向图D，使得D与$\overleftarrow{D}$同构。

4. 以$\overleftarrow{D}$记D的逆向图。

(1) 证明：

① $\overleftarrow{\overleftarrow{D}} = D$；

② $d^+_{\overleftarrow{D}}(v) = d^-_D(v)$；

③ 在$\overleftarrow{D}$中可以从顶点v到达顶点u的充要条件是在D中可以从u到达v。

(2) 证明：若D中无回路，则$\delta^+(D) = 0, \delta^-(D) = 0$。

5. 证明：G有一个定向图D，使得$\forall v \in V$，有$|d^+(v) - d^-(v)| \leqslant 1$。

6. 设有向图D中无回路，证明：

(1) $\delta^-(D) = 0$；

(2) 可以把D的顶点编号排列成$v_1, v_2, \cdots, v_\nu$，使得以顶点$v_i (1 \leqslant i \leqslant \nu)$为头的一切弧的尾属于顶点集$\{v_1, v_2, \cdots, v_{i-1}\}$。

7. 设D为有向图，若对$V(D)$的每一个非空真子集S均有$|(S, \overline{S})| \geqslant k$，则称$D$为$k$边连通有向图，证明：$D$是强连通有向图，当且仅当$D$是1边连通有向图。

8. 设D为有向图，若$S \subseteq V(D)$满足：(1)S是独立集；(2) 对任意顶点$v \notin S$，存在$u \in S$使$(u, v) \in A(D)$，则称S为D的核。证明：任一个无回路的有向图必有核。

9. 设D是连通图，$x, y \in V(D)$，$d^+_D(x) - d^-_D(x) = l = d^-_D(y) - d^+_D(y)$，且对任何$v \in V(D)$，$d^-_D(v) = d^+_D(v)$（$v$称为平衡点）。证明：$D$中含有$l$条不交的从$x$到$y$的路。

10. (1) 证明：设D是连通图。若对任何$x \in V(D)$均有$|d^+_D(x) - d^-_D(x)| \leqslant 1$，且对任何$a \in A(D)$均含在奇数条回路中，则$D$是有向Euler图。

(2) 举例说明(1)中逆命题不真。

(3) 证明：连通图G是Euler图，当且仅当G的每条边都包含在奇数个圈中。

11. (1) 证明：若D是强连通简单有向图，$\nu \geqslant 3$且$\varepsilon > (\nu - 1)(\nu - 2) + 2$，则$D$为有向Hamilton图。

(2) 构造一个强连通简单有向图D，使得$\varepsilon = (\nu - 1)(\nu - 2) + 2$，且$D$不是有向Hamilton图。

12. 证明:任何竞赛图要么自身是强连通图,要么改变其中某条边的定向后成为强连通图.

13. 百种昆虫,两种之中必有一种能咬死另一种.证明:可以将这一百种昆虫每种取一个虫子,再排成一个纵队,使得每个虫子能咬死紧跟其后的那个虫子.

14. 桌上两堆火柴,两人轮流从某一堆中取若干根火柴,每次只能从一堆中取,不能不取,没有火柴可取的人是输者,给出取胜策略.

15. 竞赛图的顶点 v 的出度称为顶点 v 的得分,把竞赛图各个顶点的得分按非降顺序排列而得到的序列称为该竞赛图的得分量,证明:如果 $(s_1,s_2,\cdots,s_n)$ 是竞赛图 T 的得分向量,则

(1) $s_1+s_2+\cdots+s_n=\frac{1}{2}n(n-1)$;

(2) 对任何 $k,1\leqslant k\leqslant n-1,s_1+s_2+\cdots+s_k\geqslant\frac{1}{2}k(k-1)$,并且不等式对一切 k 严格成立的充要条件为 T 强连通;

(3) 对 $1\leqslant k\leqslant n,\frac{1}{2}(k-1)\leqslant s_k\leqslant\frac{1}{2}(n+k-2)$.

第九章　图的空间与矩阵

一个图由它的顶点间的邻接关系或顶点与边之间的关联关系完全决定. 我们把图中的顶点和边标号进而用 0 - 1 矩阵来表示图. 这样就可以利用线性代数的方法来研究图的性质. 与图有关的矩阵包括邻接矩阵、关联矩阵、圈矩阵和补圈矩阵. 矩阵 - 树定理是关于图和矩阵的经典定理, 它给出了任何一个标号图的支撑树的数目.

本章我们将介绍图的空间、图的矩阵、有向图的矩阵以及重要的矩阵 - 树定理.

9.1　图的空间

给定图 $G=(V,E)$, $E=\{e_1,e_2,\cdots,e_\varepsilon\}$, $\forall E'\subseteq E$, 令

$$x_i=\begin{cases}1, e_i\in E',\\ 0, e_i\notin E'.\end{cases}$$

记 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_\varepsilon)$. 显然, G 的支撑子图 $G'=(V,E')$ 一一对应于 ε 维 0 - 1 向量 $\boldsymbol{x}$, 于是, 对于图 G, 可以定义数域 $\mathbb{Z}_2=\{0,1\}$ 上的一个向量空间 $\mathscr{E}(G)$: 它是由上述所有 ε 维 0 - 1 向量 x 组成的; 并且定义 $\mathscr{E}(G)$ 中向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_\varepsilon)$ 和 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_\varepsilon)$ 的加法运算(称为环和运算) 如下

$$\boldsymbol{x}\oplus\boldsymbol{y}=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_\varepsilon+y_\varepsilon)\pmod 2.$$

定义 $\mathscr{E}(G)$ 中向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_\varepsilon)$ 与 $\mathbb{Z}_2$ 中的数 c 的乘法运算为

$$c\cdot\boldsymbol{x}=(cx_1,cx_2,\cdots,cx_\varepsilon).$$

设 $\mathscr{E}(G)$ 中向量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 分别对应的 G 中支撑子图为 $G_x=(V,E_x)$ 和 $G_y=(V,E_y)$, 则 $\boldsymbol{x}\oplus\boldsymbol{y}$ 对应的 G 中支撑子图 $G_{x\oplus y}$ 的边集为 $E_x\oplus E_y$, 即 E_x 与 E_y 的对称差(环和).

因为由一条边导出的 G 的支撑子图所对应的 ε 维 0 - 1 向量构成了 $\mathscr{E}(G)$ 的一个基:

$$(1,0,0,\cdots,0),(0,1,0,\cdots,0),\cdots,(0,0,\cdots,0,1),$$

所以 $\mathscr{E}(G)$ 是 ε 维向量空间，并且 $\mathscr{E}(G)$ 中共有 2^{ε} 个向量. 我们称 $\mathscr{E}(G)$ 为 G 的支撑子图空间(spanning subgraph space)，也称为 G 的边空间(edge space).

现在考虑 $\mathscr{E}(G)$ 中的两类向量：圈向量和补圈向量.

所谓圈向量(cycle vector)是指零向量，或者 G 中一个或多个边不交的圈的边的集合所导出的 G 中支撑子图相对应的 ε 维 0－1 向量.

定理9.1.1 $\mathscr{C}(G)=\{x \mid x$ 为 $\mathscr{E}(G)$ 中圈向量$\}$ 是 $\mathscr{E}(G)$ 的一个子空间.

证明 显然，$\forall x\in\mathscr{C}(G)$ 及 $c\in Z_2$，$c\cdot x\in\mathscr{C}(G)$. 又因为 $\forall x,y\in\mathscr{C}(G)$，$x$ 和 y 所对应的 G 中支撑子图 $G_x=(V,E_x)$ 和 $G_y=(V,E_y)$ 中不含奇点，且 $x\oplus y$ 所对应的 G 中支撑子图 $G_{x\oplus y}$ 的边集为 $E_x\oplus E_y$，所以 $G_{x\oplus y}$ 中每个顶点都是偶点. 从而 $G_{x\oplus y}$ 的每个非空连通分支都是 Euler 图，因此 $G_{x\oplus y}$ 的每个非空连通分支都是一些边不交的圈的边的集合所导出的 G 中支撑子图，故 $x\oplus y\in\mathscr{C}(G)$. □

类似地，补圈向量(cocycle vector)是指零向量或者 G 中一个或多个边不交的补圈所导出的 G 中支撑子图相对应的 ε 维 0－1 向量. 根据推论 2.3.2，补圈向量也就是零向量或者 G 中边割所导出的 G 中支撑子图相对应的 ε 维 0－1 向量.

定理9.1.2 $\mathscr{S}(G)=\{x \mid x$ 为 $\mathscr{E}(G)$ 中补圈向量$\}$ 是 $\mathscr{E}(G)$ 的一个子空间.

证明 显然，$\forall x\in\mathscr{S}(G)$ 及 $c\in Z_2$，$c\cdot x\in\mathscr{S}(G)$. 又因为，$\forall x,y\in\mathscr{S}(G)$，当 $x=y$ 时，$x\oplus y=0$，所以下设 $x\neq y$. 设 x 和 y 分别对应的 G 中支撑子图为 $G_x=(V,E_x)$ 和 $G_y=(V,E_y)$，则 $x\oplus y$ 对应的 G 中支撑子图为 $G_{x\oplus y}=(V,E_x\oplus E_y)$. 因 $E_x\neq E_y$，设 $E_x=[S_1,\overline{S_1}]$，$E_y=[S_2,\overline{S_2}]$，故 $S_1\neq S_2$，$S_1\neq\overline{S_2}$. 令 $S_3=S_1\cap S_2$，$S_4=\overline{S_1}\cap\overline{S_2}$，$S_5=S_3\cup S_4$，从而易知 S_5 为 V 的非空真

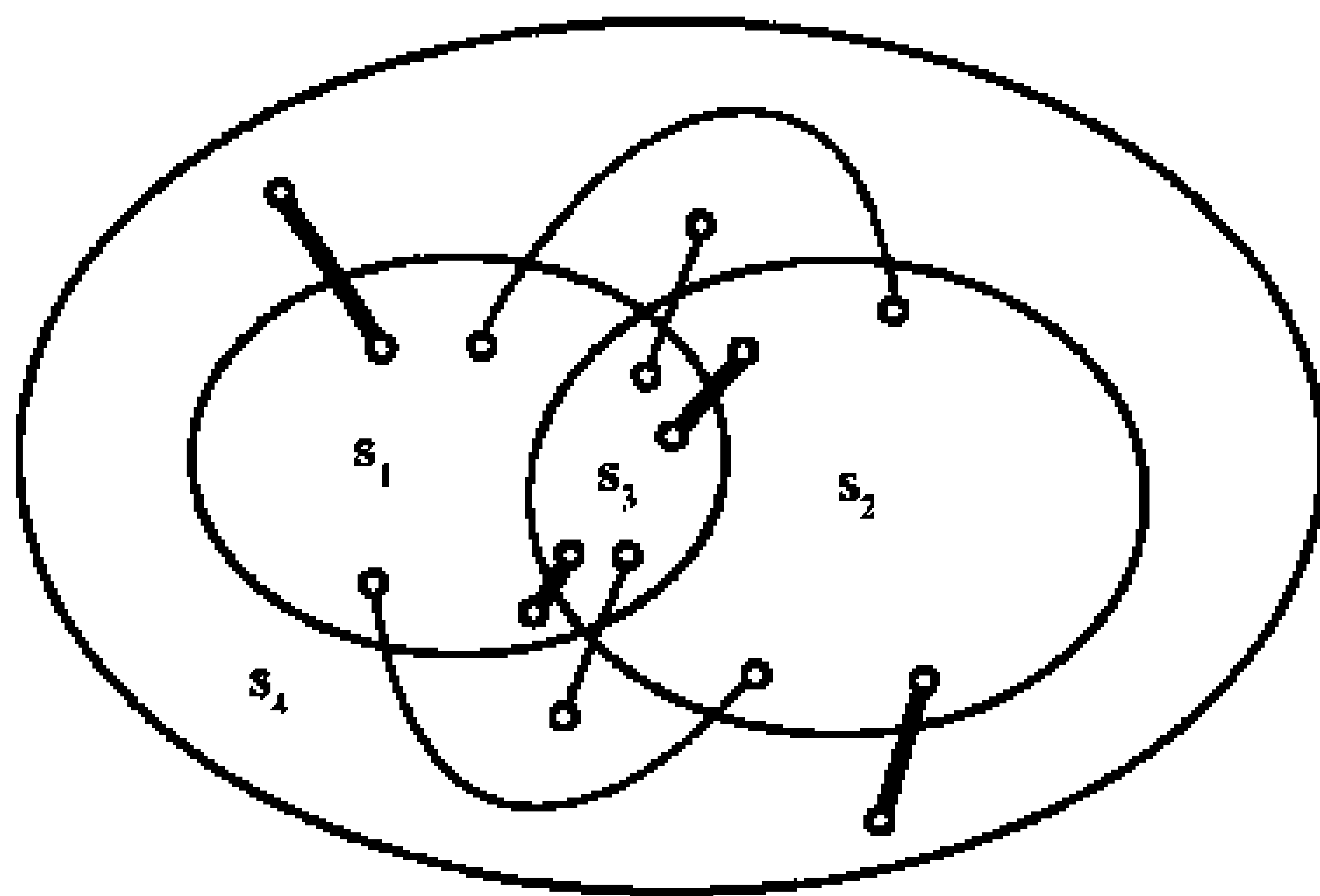


图 9.1.1　E_x 与 E_y 的关系

子集. 在图 9.1.1 中，E_x 中的边具有上半部分的四种类型，E_y 中的边具有下半部分的四种类型，而上下两部分中细边的类型相同，因此，$E_x\oplus E_y$ 的边只是上下

两部分粗边的类型，所以 $E_x \oplus E_y = [S_5, \overline{S}_5]$，即 $x \oplus y \in \mathscr{S}(G)$. □

我们把 $\mathscr{C}(G)$ 和 $\mathscr{S}(G)$ 分别称为图 G 的圈空间(cycle space) 和补圈空间(cocycle space).

设 T 是连通图 $G = (V, E)$ 的支撑树，

$$E(T) = \{e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_{\nu-1}}\},$$

$$E(\overline{T}) = \{e_{j_1}, e_{j_2}, \cdots, e_{j_{\varepsilon-\nu+1}}\},$$

则 $T + e_{j_k}$ 中含有且只含一个圈 C_{j_k}，称 C_{j_k} 为 G 中关于 T 的基本圈(basic cycle), $k = 1,2,\cdots,\varepsilon-\nu+1$；同样，$\overline{T} + e_{i_l}$ 中含且只含 G 的一个补圈 Ω_{i_l}，称 Ω_{i_l} 为 G 中关于 T 的基本补圈(basic cocycle), $l = 1,2,\cdots,\nu-1$.

因为补树 $\overline{T}$ 的边 e_{j_k} 只在基本圈 C_{j_k} 中出现，而不在其他基本圈中出现，所以任何 p 个不同的基本圈的边集的环和不可能为空集，$p \leqslant \varepsilon-\nu+1$，从而这 p 个基本圈对应的圈向量的环和不可能为零向量，这说明所有基本圈 $C_{j_1},\cdots,C_{j_{\varepsilon-\nu+1}}$ 对应的圈向量线性无关．类似地，G 中关于 T 的基本补圈 $\Omega_{i_1},\cdots,\Omega_{i_{\nu-1}}$ 对应的补圈向量也是线性无关的．

定理 9.1.3 连通图 G 中关于它的支撑树 T 的基本圈 $C_{j_1},\cdots,C_{j_{\varepsilon-\nu+1}}$ 所对应的圈向量 $x_{j_1},\cdots,x_{j_{\varepsilon-\nu+1}}$ 是 $\mathscr{C}(G)$ 的一个基．

证明 只需证明：$\forall x \in \mathscr{C}(G)$，$x$ 可表示为 $x_{j_1},\cdots,x_{j_{\varepsilon-\nu+1}}$ 的线性组合(组合系数取自 $\mathbb{Z}_2$)．当 $x = 0$ 时，结论显然成立．下设 $x \neq 0$．于是 x 所对应的 G 中支撑子图 $G_x = (V, E_x)$ 中至少有一条边属于 $E(\overline{T})$，不妨设

$$E_x \cap E(\overline{T}) = \{e_{j_1}, e_{j_2}, \cdots, e_{j_t}\} \quad (1 \leqslant t \leqslant \varepsilon-\nu+1).$$

令

$$E' = E(C_{j_1}) \oplus E(C_{j_2}) \oplus \cdots \oplus E(C_{j_t}).$$

设图 (V, E') 对应的 ε 维 0－1 向量为 x'，则

$$x' = x_{j_1} \oplus x_{j_2} \oplus \cdots \oplus x_{j_t},$$

从而由定理 9.1.1 知，$x' \in \mathscr{C}(G)$，$x' \oplus x \in \mathscr{C}(G)$.

因为 $E' \oplus E_x$ 的边只能是 $E(T)$ 中的边，所以 $E' \oplus E_x$ 在 G 中的支撑子图 $(V, E' \oplus E_x)$ 不含圈，于是 $x' \oplus x = 0$，即 $x = x'$. □

由此即得下面的定理：

定理 9.1.4 连通图 G 的圈空间 $\mathscr{C}(G)$ 的维数为 $\varepsilon-\nu+1$，$\mathscr{C}(G)$ 中包含 $2^{\varepsilon-\nu+1}$ 个向量． □

对于图 G 的边空间 $\mathscr{E}(G)$ 的两个向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_\varepsilon)$ 和 $\boldsymbol{y}=(y_1,\cdots,y_\varepsilon)$，定义

$$(x,y)=\sum_{i=1}^{\varepsilon}x_iy_i \pmod 2$$

为 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的内积(inner product).

把定理 9.1.4 推广到非连通图上去，即有如下定理：

推论 9.1.5　图 G 的圈空间 $\mathscr{C}(G)$ 的维数为 $\varepsilon-\nu+\omega$，$\mathscr{C}(G)$ 中含 $2^{\varepsilon-\nu+\omega}$ 个向量.

证明　设 $G_1,G_2,\cdots,G_\omega$ 是 G 的各连通分支，把 $\mathscr{C}(G_i)$ 中每个 $\varepsilon(G_i)$ 维 0－1 向量通过在相应的位置上补 0，化成 $\varepsilon(G)$ 维 0－1 向量，则 $\mathscr{C}(G_i)$ 可以看成是 $\mathscr{C}(G)$ 的子空间，$i=1,2,\cdots,\omega$，并且 $\forall 1\leqslant i<j\leqslant\omega$，$\boldsymbol{x}\in\mathscr{C}(G_i)$ 及 $\boldsymbol{y}\in\mathscr{C}(G_j)$，有 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=0$，即 $\mathscr{C}(G_1),\cdots,\mathscr{C}(G_\omega)$ 是两两正交的，又

$$\mathscr{C}(G)=\mathscr{C}(G_1)\oplus\cdots\oplus\mathscr{C}(G_\omega),$$

所以

$$\dim\mathscr{C}(G)=\sum_{i=1}^{\omega}\dim\mathscr{C}(G_i)=\sum_{i=1}^{\omega}\big(\varepsilon(G_i)-\nu(G_i)+1\big)=\varepsilon-\nu+\omega.$$

□

类似地，可以证明下列三个结论：

定理 9.1.6　连通图 G 关于它的支撑树 T 的基本补圈所对应的补圈向量的全体，构成补圈空间 $\mathscr{S}(G)$ 的一个基. □

定理 9.1.7　连通图 G 的补圈空间 $\mathscr{S}(G)$ 的维数为 $\nu-1$，$\mathscr{S}(G)$ 中包含 $2^{\nu-1}$ 个向量. □

推论 9.1.8　图 G 的补圈空间 $\mathscr{S}(G)$ 的维数为 $\nu-\omega$，$\mathscr{S}(G)$ 中包含 $2^{\nu-\omega}$ 个向量. □

例 9.1.1　在图 9.1.2 中，$\nu=4,\varepsilon=5$，取支撑树为 $G[\{e_1,e_2,e_3\}]$，基本圈对应的圈向量为

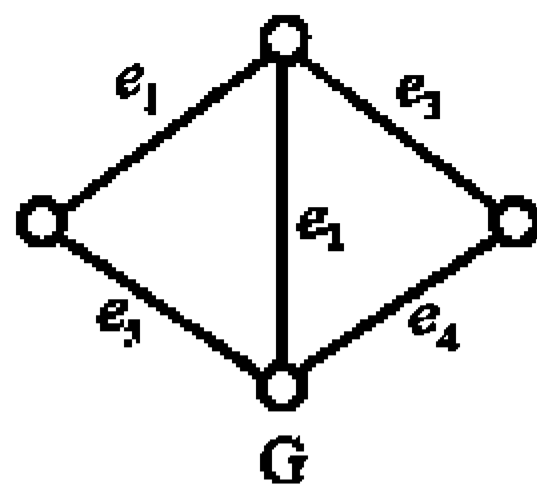


图 9.1.2

$$\boldsymbol{x}_1=(1,1,0,0,1),\quad \boldsymbol{x}_2=(0,1,1,1,0).$$

$\mathscr{C}(G)$ 中的其他圈向量为

$$x_3 = x_1 \oplus x_2 = (1,0,1,1,1),$$
$$x_4 = 0 \cdot x_1 \oplus 0 \cdot x_2 = (0,0,0,0,0).$$

同样,G 中基本补圈对应的补圈向量为

$$y_1 = (1,0,0,0,1),$$
$$y_2 = (0,1,0,1,1),$$
$$y_3 = (0,0,1,1,0).$$

$\mathscr{S}(G)$ 中其他补圈向量为

$$y_4 = y_1 \oplus y_2 = (1,1,0,1,0),$$
$$y_5 = y_1 \oplus y_3 = (1,0,1,1,1),$$
$$y_6 = y_2 \oplus y_3 = (0,1,1,0,1),$$
$$y_7 = y_1 \oplus y_2 \oplus y_3 = (1,1,1,0,0),$$
$$y_8 = 0 \cdot y_1 \oplus 0 \cdot y_2 \oplus 0 \cdot y_3 = (0,0,0,0,0).$$ □

在例 9.1.1 中,向量(1,0,1,1,1)既是圈向量又是补圈向量.

定理 9.1.9 $\forall x \in \mathscr{C}(G), y \in \mathscr{S}(G)$,有$(x,y) = 0$.

证明 若 $x = \mathbf{0}$ 或 $y = \mathbf{0}$,则定理成立.若 $x \neq \mathbf{0}, y \neq \mathbf{0}$.设圈向量 x 对应于 G 中k 个边不交的圈$C_1, \cdots, C_k$,补圈向量 y 对应于G 中边割$[S,\overline{S}]$.注意到任一圈与任一个边割的公共边数总是偶数.由于 C_i 与$[S,\overline{S}]$ 的公共边数为 $2m_i$($1 \leqslant i \leqslant k$),因此 $\bigcup_{i=1}^{k} C_i$ 与$[S,\overline{S}]$ 有 $2\sum_{i=1}^{k} m_i$ 条公共边,从而 x 与 y 恰有偶数个位置的分量同为 1,即知$(x,y) = \sum_{i=1}^{\epsilon} x_i y_i \pmod 2 = 0$. □

9.2 图的矩阵

本节将介绍与图有关的四种矩阵及其关系.

9.2.1 邻接矩阵

设 G 是一个 ν 阶图,G 的邻接矩阵(adjacent matrix)$\boldsymbol{A}(G) = (a_{ij})$ 是一个 $\nu \times \nu$ 矩阵,其中 a_{ij} 等于第i 个顶点与第j 个顶点之间的边数.例如图 9.2.1 中图 G 的邻接矩阵$\boldsymbol{A}(G)$ 为

$$A(G)=\begin{array}{c}\begin{matrix}v_1&v_2&v_3&v_4&v_5\end{matrix}\\\begin{bmatrix}0&2&0&0&0\\2&0&1&0&1\\0&1&0&1&1\\0&0&1&1&1\\0&1&1&1&0\end{bmatrix}\end{array}\begin{matrix}\\v_1\\v_2\\v_3\\v_4\\v_5\end{matrix}$$

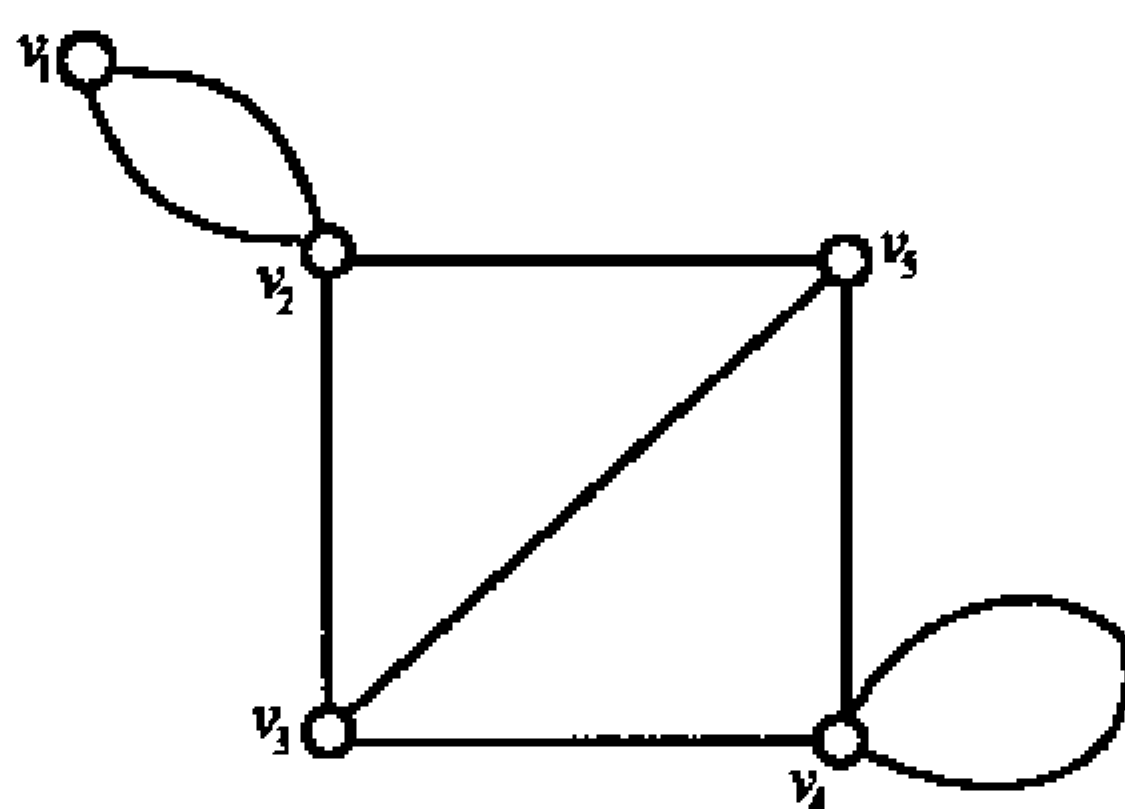


图 9.2.1　图 G

图的邻接矩阵有下列性质：

(1) $A(G)$ 是一个以非负整数为元素的 ν 阶对称矩阵，即 $A^T(G)=A(G)$. 反之，对于任何以非负整数为元素的 ν 阶对称矩阵 Q，总可以构造一个 ν 阶图 G，使 $A(G)=Q$.

(2) G 中第 i 个顶点的度等于 $\sum\limits_{j\neq i}a_{ij}+2a_{ii}$.

(3) G 由 $\omega\geqslant 2$ 个连通分支 $G_1,\cdots,G_\omega$ 组成，当且仅当在顶点的适当标号下，G 的邻接矩阵 $A(G)$ 可以写成如下的块对角形式：

$$A(G)=\begin{bmatrix}A(G_1)&&&\mathbf{0}\\&A(G_2)&&\\&&\ddots&\\\mathbf{0}&&&A(G_\omega)\end{bmatrix},$$

其中 $A(G_i)$ 是连通分支 G_i 的邻接矩阵，$i=1,2,\cdots,\omega$.

不难知道，$A(G)$ 中的元素 a_{ij} 其实可看成是 G 中连接第 i 个顶点与第 j 个顶点的长度为 1 的不同途径的数目. 推而广之，有下述定理：

定理 9.2.1　$A^r(G)$ 中第 i 行第 j 列的元素等于 G 中连接第 i 个顶点 v_i 与第 j 个顶点 v_j 的长度为 r 的不同途径的数目，$1\leqslant i,j\leqslant\nu$，这里 $A^r(G)$ 是 r 个 $A(G)$ 的乘积.

证明　对 r 进行归纳. 当 $r=1$ 时，由前面的讨论知定理成立. 设 $A^{r-1}(G)$ 的

第 i 行第 j 列元素等于 G 中长为 $r-1$ 的不同 (v_i, v_j) 途径的数目，$r \geqslant 2$，将 $A^r(G)$ 中第 i 行第 j 列元素记为 $a_{ij}^{(r)}$，则由矩阵乘法的定义有

$$a_{ij}^{(r)} = \sum_{k=1}^{\nu} a_{ik}^{(r-1)} a_{kj}.$$

由归纳假设，$a_{ik}^{(r-1)}$ 是 G 中长为 $r-1$ 的不同 (v_i, v_k) 途径的数目，因而 $a_{ik}^{(r-1)} a_{kj}$ 就是 G 中经过 v_k 的长为 r 的不同 (v_i, v_j) 途径的数目，于是 $\sum_{k=1}^{\nu} a_{ik}^{(r-1)} a_{kj}$ 就是 G 中全部的长为 r 的不同 (v_i, v_j) 途径的数目. □

9.2.2 关联矩阵

设 G 是具有 ν 个顶点和 ε 条边的非空无环图. G 的关联矩阵(incident maxtrix) $M(G) = (m_{ij})$ 是一个 $\nu \times \varepsilon$ 矩阵，其中

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, \text{第 } i \text{ 个顶点与第 } j \text{ 条边关联}, \\ 0, \text{否则}. \end{cases}$$

例如图 9.2.2 中，图 G 的关联矩阵 $M(G)$ 为

$$M(G) = \begin{array}{c} \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} \end{array}.$$

图 9.2.2 非空无环图

图的关联矩阵有下列性质：

(1) $M(G)$ 的每个列恰包含两个 1，反之，若一个 $\nu \times \varepsilon$ 的 0－1 矩阵 B 中每列恰有两个 1，则可以构造一个 ν 个顶点 ε 条边的无环图 G，使得 $M(G) = B$.

(2) $M(G)$ 中每行所包含的 1 的个数等于对应顶点的度.

(3) 非空无环图 G 有 ω 个连通分支 $G_1, \cdots, G_\omega$ $(\omega \geqslant 2)$，当且仅当通过适当排列顶点和边所对应的行和列，G 的关联矩阵 $M(G)$ 可以写成块对角形式：

$$M(G)=\begin{bmatrix} M(G_1) & & & 0 \\ & M(G_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & M(G_\omega) \end{bmatrix},$$

其中 $M(G_i)$ 是 G_i 的关联矩阵，$i=1,2,\cdots,\omega$.

应当指出的是，邻接矩阵和关联矩阵是计算机记录图的两种主要方法.

因为非空无环图 G 中非孤立点所关联的边的集合是 G 的一个边割，所以 M 的每一行都是补圈空间 $\mathscr{S}(G)$ 中的一个向量，即补圈向量.若将 $M(G)$ 的第 i 行记为 $M_i(1\leqslant i\leqslant \nu)$，则 $M(G)$ 的秩(rank)就是 $M_1,M_2,\cdots,M_\nu$ 所包含的线性无关的向量的个数的最大值.

定理 9.2.2　若 G 是 ν 阶连通的非空无环图，则

$$\text{rank}M(G)=\nu-1.$$

证明　由条件知，$\nu\geqslant 2$，由于 $M(G)$ 的每一列恰有两个 1，因此

$$M_1\oplus M_2\oplus\cdots\oplus M_\nu=0.$$

所以 $M_1,M_2,\cdots,M_\nu$ 线性相关，于是 $\text{rank}M(G)\leqslant\nu-1$.

下面证明 $M(G)$ 中任何 $\nu-1$ 个行向量都是线性无关的.若不然，不失一般性可假设 $M_1,M_2,\cdots,M_{\nu-1}$ 线性相关，即存在不全为 0 的数 $c_1,\cdots,c_{\nu-1}\in Z_2$，使

$$c_1M_1\oplus c_2M_2\oplus\cdots\oplus c_{\nu-1}M_{\nu-1}=0.$$

设 $c_{i_1},c_{i_2},\cdots,c_{i_k}$ 是 $c_1,\cdots,c_{\nu-1}$ 中所有不为 0 的数，则

$$M_{i_1}\oplus M_{i_2}\oplus\cdots\oplus M_{i_k}=0.$$

另一方面，设 G 中与 M_{i_l} 相对应的顶点为 $v_{i_l}(1\leqslant l\leqslant k)$，因 G 连通，故 G 中必有一条边(设为第 j 条边)，它的一个端点属于 $\{v_{i_1},v_{i_2},\cdots,v_{i_k}\}$(设为 v_{i_1})，另一端点不属于 $\{v_{i_1},\cdots,v_{i_k}\}$，于是 M_{i_1} 的第 j 个分量为 1，而 $M_{i_2},\cdots,M_{i_k}$ 的第 j 分量均等于 0，所以 $M_{i_1}\oplus M_{i_2}\oplus\cdots\oplus M_{i_k}\neq 0$，此为矛盾.　□

根据定理 9.2.2 和关联矩阵的性质(3)即得下面的定理：

定理 9.2.3　若 ν 阶非空无环图 G 有 ω 个连通分支，则

$$\text{rank }M(G)=\nu-\omega.\qquad\square$$

从无环非空图 G 的关联矩阵 $M(G)$ 中任意删去一行后所得到的矩阵称为 G 的基本关联矩阵(basic incident matrix)，记作 $M_f(G)$，被删去的一行所对应的顶点称为参考点(consult vertex).

推论 9.2.4　ν 阶无环非空图 G 是连通的，当且仅当

$$\text{rank}M(G)=\text{rank}M_f(G)=\nu-1.$$

证明　必要性由定理 9.2.2 及其证明得到，充分性由定理 9.2.3 即得．

□

定理 9.2.5　非空无环图 G 的子图 T 是 G 的支撑树，当且仅当 T 的边在 $\boldsymbol{M}_f(G)$ 中对应的列组成的子矩阵是非奇异的．

证明　记 $\nu(G)=\nu$，G 的子图 T 的边在 $\boldsymbol{M}_f(G)$ 中对应的列组成的子矩阵为 $\boldsymbol{M}$．

若 T 是 G 的支撑树，则 $\boldsymbol{M}$ 是 $\nu-1$ 阶方阵，且 $\boldsymbol{M}$ 是 T 的基本关联矩阵．因为 T 连通，故由推论 9.2.4，$\mathrm{rank}\boldsymbol{M}=\nu-1$，即 $\boldsymbol{M}$ 是非奇异的．

反之，若 $\boldsymbol{M}$ 是非奇异的，则 $\boldsymbol{M}$ 是 $\nu-1$ 阶方阵．由于 T 是由与 $\boldsymbol{M}$ 的列相对应的边组成的子图，因此 T 有 $\nu-1$ 条边，有 ν 个顶点（包括参考点），于是 $\boldsymbol{M}$ 是 T 的基本关联矩阵．因为 $\mathrm{rank}\boldsymbol{M}=\nu-1$，所以由推论 9.2.4 知，$T$ 连通，从而 T 是 G 的一个支撑树．　□

9.2.3　圈矩阵

设图 G 有 ε 条边和 n 个圈．G 的圈矩阵(cycle matrix) $\boldsymbol{C}(G)=(c_{ij})$ 是 $n\times\varepsilon$ 矩阵，其中

$$c_{ij}=\begin{cases}1, & \text{第 } j \text{ 条边上第 } i \text{ 个圈上},\\ 0, & \text{否则}.\end{cases}$$

例 9.2.1　求图 9.2.3 中图 G_1 和 G_2 的圈矩阵．

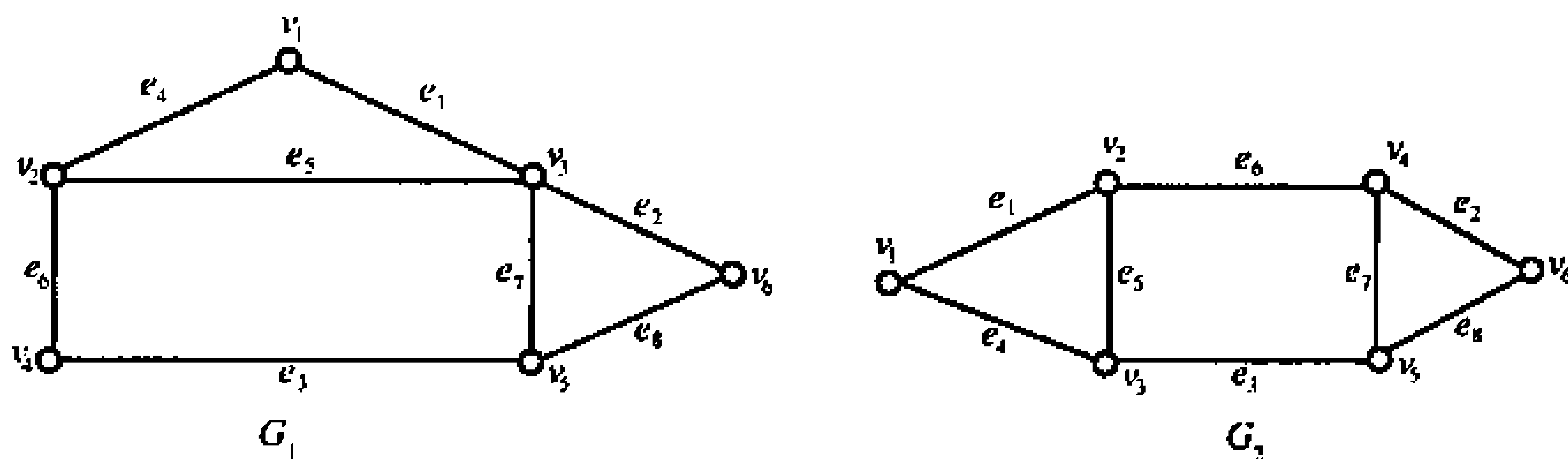


图 9.2.3　图的圈矩阵的例子

解　G_1 和 G_2 均有 6 个圈 $C_i(i=1,2,\cdots,6)$，其中

$$E(C_1)=\{e_1,e_4,e_5\},$$
$$E(C_2)=\{e_2,e_7,e_8\},$$
$$E(C_3)=\{e_3,e_5,e_6,e_7\},$$
$$E(C_4)=\{e_1,e_3,e_4,e_6,e_7\},$$
$$E(C_5)=\{e_2,e_3,e_5,e_6,e_8\},$$

$$E(C_6) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_6, e_8\}.$$

因此 G_1 和 G_2 的圈矩阵

$$C(G_1) = C(G_2) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{array}.$$

□

由此看出,两个不同构的图可以有相同的圈矩阵.所以与邻接矩阵和关联矩阵不同的是,不能用圈矩阵来记录一个图.

显然,圈矩阵 $C(G)$ 的每一行都是圈空间 $\mathscr{C}(G)$ 中的一个向量,即圈向量.因此由定理 9.1.9 有如下定理.

定理 9.2.6　设 G 是含有圈的无环图,则

$$M(G) \cdot C^T(G) = 0 (\mathrm{mod}\ 2),$$
$$C(G) \cdot M^T(G) = 0 (\mathrm{mod}\ 2).$$

□

设 T 是连通图 G 的一个支撑树,则有关于 T 的 $\varepsilon - \nu + 1$ 个基本圈.由这些基本圈在 $\mathscr{C}(G)$ 中对应的行向量所构成的子矩阵称为 G(关于 T) 的基本圈矩阵 (basic cycle matrix),记为 $C_f(G)$.

因为连通图 G 的 $\varepsilon - \nu + 1$ 个基本圈所对应的圈向量是圈空间 $\mathscr{C}(G)$ 的一个基,所以有

定理 9.2.7　设 G 是含有圈的连通图,则

$$\mathrm{rank} C_f(D) = \mathrm{rank} C(G) = \varepsilon - \nu + 1.$$

□

9.2.4　补圈矩阵

设 G 是有 ε 条边和 m 个补圈的图.G 的补圈矩阵(cocycle matrix) $Q(G) = (q_{ij})$ 是 $m \times \varepsilon$ 矩阵,其中

$$q_{ij} = \begin{cases} 1, 第\ j\ 条边上第\ i\ 个补圈上, \\ 0, 否则. \end{cases}$$

易知,补圈矩阵 $Q(G)$ 的每一行都是补圈空间 $\mathscr{S}(G)$ 中的一个向量,所以由定理 9.1.9 有

定理 9.2.8　设图 G 含有连杆和圈,则

$$C(G) \cdot Q^T(G) = 0 \pmod 2,$$
$$Q(G) \cdot C^T(G) = 0 \pmod 2. \qquad \square$$

设 T 是连通图 G 的一个支撑树，G 中关于 T 的 $\nu-1$ 个基本补圈在 $Q(G)$ 中对应的行向量所构成的子矩阵称为 G(关于 T) 的基本补圈矩阵(basic cocycle matrix)，记为 $Q_f(G)$.

由于连通图 G 的 $\nu-1$ 个基本补圈所对应的补圈向量是补圈空间 $\mathscr{S}(G)$ 的一个基，因此有

定理 9.2.9 设 G 是含有连杆的连通图，则

$$\mathrm{rank} Q_f(G) = \mathrm{rank} Q(G) = \nu - 1. \qquad \square$$

设 T 是含有圈的连通无环图 G 的一个支撑树，如果把 $E(G)$ 排成如下顺序：

$$e_{j_1}, e_{j_2}, \cdots, e_{j_{\varepsilon-\nu+1}}, e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_{\nu-1}},$$

前 $\varepsilon-\nu+1$ 条边属于 $\overline{T}$，后 $\nu-1$ 边条属于 T，并且把 G 中含 e_{j_t} 的基本圈记为第 t 个圈($1 \leqslant t \leqslant \varepsilon-\nu+1$)，把 G 中含 e_{i_s} 的基本补圈记为第 s 个补圈($1 \leqslant s \leqslant \nu-1$)，则

$$C_f(G) = [I_{\varepsilon-\nu+1}, C_{12}], \qquad (9.2.1)$$
$$Q_f(G) = [Q_{11}, I_{\nu-1}], \qquad (9.2.2)$$
$$M_f(G) = [M_{11}, M_{12}], \qquad (9.2.3)$$

其中 $I_{\varepsilon-\nu+1}$ 和 $I_{\nu-1}$ 分别为 $\varepsilon-\nu+1$ 阶和 $\nu-1$ 阶单位矩阵，而 M_{11} 和 M_{12} 分别是 $(\nu-1)\times(\varepsilon-\nu+1)$ 和 $(\nu-1)\times(\nu-1)$ 矩阵.

定理 9.2.10 设 G 是含圈的连通无环图，且 $C_f(G)$, $Q_f(G)$ 和 $M_f(G)$ 已表示成式(9.2.1) ~ (9.2.3) 的形式，则

$$C_{12} = M_{11}^T \cdot (M_{12}^T)^{-1},$$
$$Q_{11} = C_{12}^T = (M_{12})^{-1} \cdot M_{11}.$$

证明 因为由式(9.2.1) 和式(9.2.3) 两式有

$$C_f(G) \cdot M_f^T(G) = M_{11}^T + C_{12} \cdot M_{12}^T,$$

所以由定理 9.2.6 知 $M_{11}^T + C_{12} \cdot M_{12}^T = 0 \pmod 2$，于是

$$M_{11}^T = C_{12} \cdot M_{12}^T.$$

而 M_{12} 的列对应于 T 的边，根据定理 9.2.5，M_{12} 是非奇异的，从而 $(M_{12}^T)^{-1}$ 存在，因此 $C_{12} = M_{11}^T \cdot (M_{12}^T)^{-1}$.

同样，由式(9.2.1) 和式(9.2.2) 两式有

$$Q_f(G) \cdot C_f^T(G) = Q_{11} + C_{12}^T,$$

故由定理 9.2.8 得 $Q_{11} + C_{12}^T = 0 \pmod 2$，即得 $Q_{11} = C_{12}^T$. $\square$

根据这个定理可知，含有圈的连通无环图 G 中，关于支撑树的基本圈矩阵和基本补圈矩阵可以由 G 的基本关联矩阵确定出来.

例 9.2.2　求图 9.2.3 中图 G_1 和 G_2 的基本关联矩阵、基本圈矩阵及基本补圈矩阵.

解　取 $G_i[\{e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}]$ 为 G_i 的支撑树，v_6 为参考点，则

$$M_f(G_1) = \left[\begin{array}{ccc:ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \triangleq [M_{11}, M_{12}],$$

不难知道，$|M_{12}^T| = 1$ 且 M_{12}^T 的伴随矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

从而

$$M_{11}^T \cdot (M_{12}^T)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

于是由定理 9.2.10 得

$$\begin{aligned} C_f(G) &= [I_3, M_{11}^T(M_{12}^T)^{-1}] \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ Q_f(G_1) &= [(M_{11}^T(M_{12}^T)^{-1})^T, I_5] \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

同理，由

$$M_f(G_2)=\begin{bmatrix}1&0&0&1&0&0&0&0\\1&0&0&0&1&1&0&0\\0&0&1&1&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&1&1&0\\0&0&1&0&0&0&1&1\end{bmatrix},$$

可求得

$$C_f(G_2)=C_f(G_1),$$
$$Q_f(G_2)=Q_f(G_1).$$ □

此例说明两个不同构的图可以有相同的基本圈矩阵和基本补圈矩阵.

值得指出的是,图 G 的圈空间 $\mathscr{C}(G)$ 是 G 的圈矩阵 $\boldsymbol{C}(G)$ 的行向量在数域 $\mathbb{Z}_2$ 上所生成的向量空间;而 G 的补圈空间 $\mathscr{S}(G)$ 则是 G 的补圈矩阵 $\boldsymbol{Q}(G)$ 的行向量在 $\mathbb{Z}_2$ 上所生成的向量空间.

9.3　有向图的矩阵

同图一样,我们也定义有向图的四种矩阵.

9.3.1　邻接矩阵

设 D 是一个 ν 阶有向图. D 的邻接矩阵 $\boldsymbol{A}(D)=(a_{ij})$ 是 $\nu\times\nu$ 矩阵,其中 a_{ij} 是 D 中以第 i 个顶点为尾、第 j 个顶点为头的弧的数目. 例如图 9.3.1 中有向图的 D 的邻接矩阵为

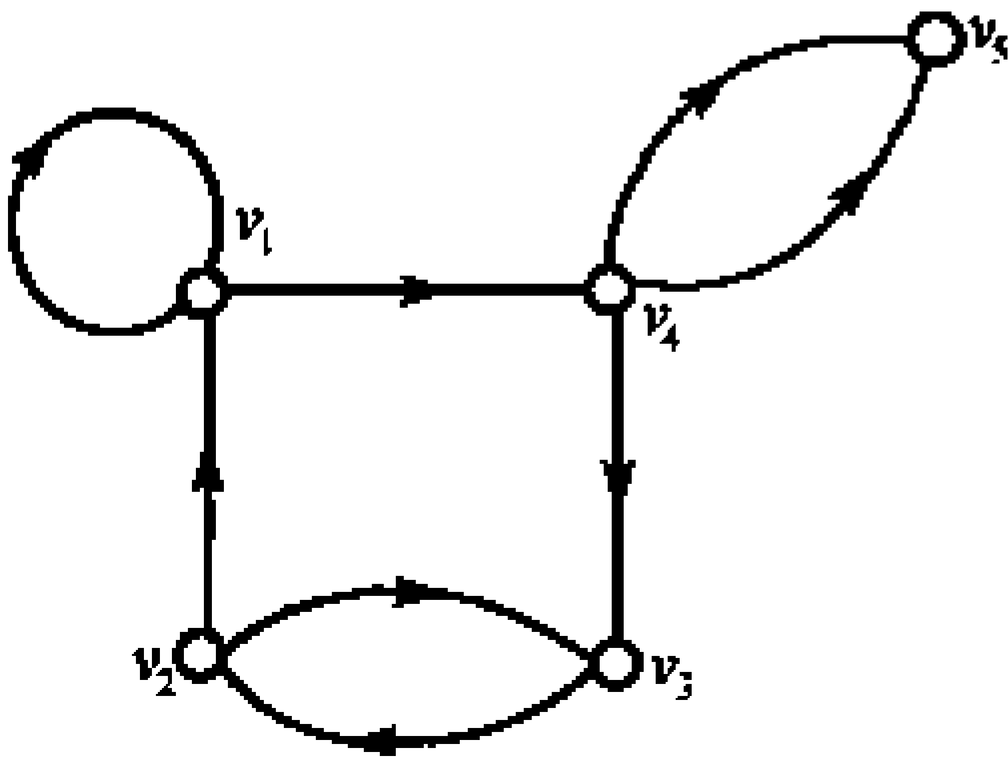


图 9.3.1　有向图 D

$$
A(D)=\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array}\\
\left[\begin{array}{ccccc}
1 & 0 & 0 & 1 & 0\\
1 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 2\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]\begin{array}{c} v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\\ v_5 \end{array}
\end{array} .
$$

有向图的邻接矩阵有下列性质：

(1) $A(D)$ 是一个以非负整数为元素的 ν 阶方阵.反之,对于任给的以非负整数为元素的 ν 阶方阵 Q,可以构成一个 ν 阶有向图 D,使 $A(D)=Q$.

(2) $A(D)$ 中第 i 行(列)元素之和等于 D 中第 i 个顶点的出(入)度.

(3) D 由 $\omega\geqslant 2$ 的连通分支 $D_1,D_2,\cdots,D_\omega$ 组成,当且仅当在顶点的适当标号下,$A(D)$ 可以写成如下的块对角形：

$$
A(D)=\begin{bmatrix}
A(D_1) & & & \mathbf{0}\\
 & A(D_1) & & \\
 & & \ddots & \\
\mathbf{0} & & & A(D_\omega)
\end{bmatrix},
$$

其中 $A(D_i)$ 为 D_i 的邻接矩阵,$i=1,2,\cdots,\omega$.

仿照定理 9.2.1 的证明,容易推出定理 9.3.1.

定理 9.3.1　$A^r(D)$ 中第 i 行第 j 列的元素等于有向图 D 中从第 i 个顶点到第 j 个顶点的长为 r 的不同有向途径的数目.　□

9.3.2　关联矩阵

设 D 是 ν 阶 ε 条弧的非空无环有向图,D 的关联矩阵 $M(D)=(m_{ij})$ 是 $\nu\times\varepsilon$ 矩阵,其中

$$
m_{ij}=\begin{cases}
1, & \text{第 } i \text{ 个顶点为第} j \text{ 条弧的尾},\\
-1, & \text{第 } i \text{ 个顶点为第} j \text{ 条弧的头},\\
0, & \text{否则}.
\end{cases}
$$

例如图 9.3.2 中有向图 D 的关联矩阵为

$$
M(D)=\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \end{array}\\
\left[\begin{array}{cccccc}
1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1\\
-1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{array}\right]\begin{array}{c} v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4 \end{array}
\end{array}
$$

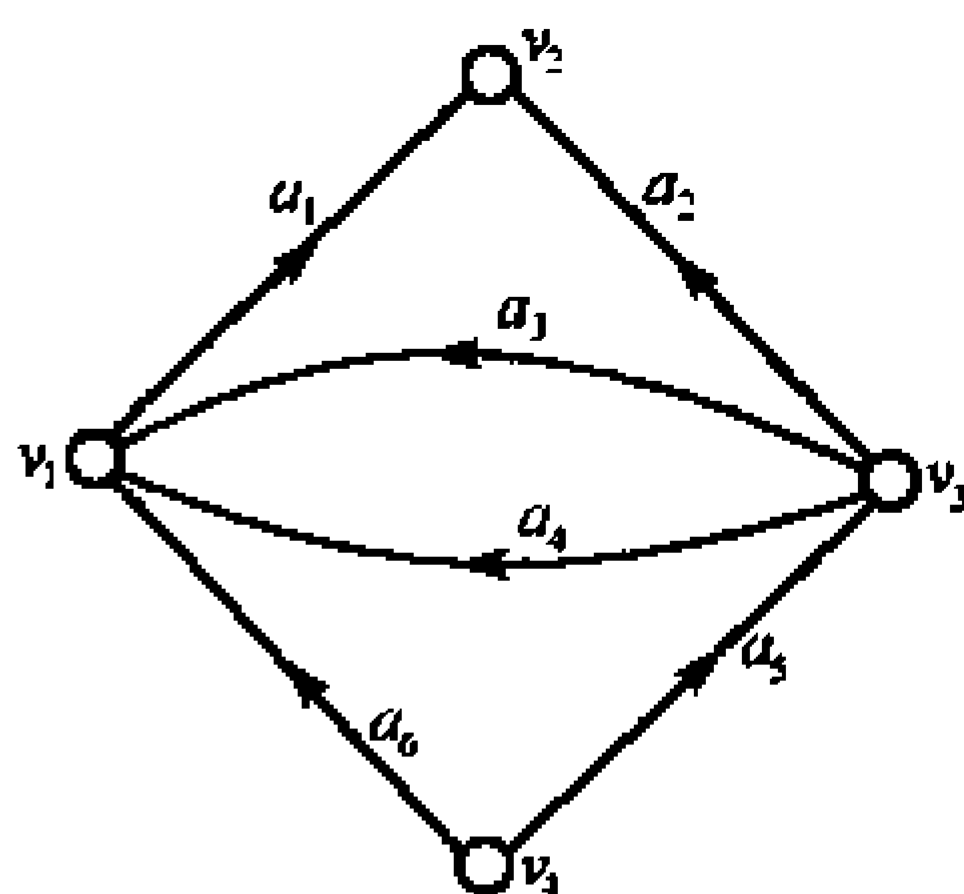


图 9.3.2 非空无环有向图 D

有向图的关联矩阵有下列性质：

(1) $\boldsymbol{M}(D)$ 的每列恰有一个 1 和一个 -1，反之，对于任给的以 1，-1 和 0 为元素，且每列恰有一个 1 和一个 -1 的 $\nu\times\varepsilon$ 矩阵 $\boldsymbol{B}$，可以构造一个 ν 阶 ε 条弧的无环有向图 D，使 $\boldsymbol{M}(D)=\boldsymbol{B}$.

(2) $\boldsymbol{M}(D)$ 的每行中 1 的个数等于对应顶点的出度，而 -1 的个数等于对应顶点的入度.

(3) 非空无环有向图 D 有 ω 个连通分支 $D_1,D_2,\cdots,D_\omega(\omega\geqslant 2)$，当且仅当通过适当排列顶点和边对应的行和列，$\boldsymbol{M}(D)$ 可以写成块对角形式：

$$\boldsymbol{M}(D)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{M}(D_1) & & & \boldsymbol{0}\\ & \boldsymbol{M}(D_2) & & \\ & & \ddots & \\ \boldsymbol{0} & & & \boldsymbol{M}(D_\omega)\end{bmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{M}(D_i)$ 为 D_i 的关联矩阵，$i=1,2,\cdots,\omega$.

同样，邻接矩阵和关联矩阵是记录有向图的两种主要方式.

因为 $\boldsymbol{M}(D)$ 的每一行都是实数域上 ε 维向量空间中的向量，所以，$\mathrm{rank}\boldsymbol{M}(D)$ 就是 $\boldsymbol{M}(D)$ 的 ν 个行向量所包含的线性无关的向量的最大个数.

同定理 9.2.2 一样，可以证明

定理 9.3.2 若 ν 阶非空无环有向图 D 连通，则 $\boldsymbol{M}(D)$ 中任何 $\nu-1$ 个行向量都是线性无关的，且 $\mathrm{rank}\boldsymbol{M}(D)=\nu-1$. □

由定理 9.3.2 及有向图关联矩阵的性质(3)，得

定理 9.3.3 若 ν 阶非空无环有向图 D 有 ω 个连通分支，则

$$\mathrm{rank}\boldsymbol{M}(D)=\nu-\omega.$$ □

类似于图，可以定义有向图 D 的基本关联矩阵 $\boldsymbol{M}_f(D)$ 和参考点.

根据定理 9.3.2 和定理 9.3.3，可得：

推论 9.3.4　ν 阶非空无环有向图 D 连通，当且仅当

$$\mathrm{rank}\boldsymbol{M}(D)=\mathrm{rank}\boldsymbol{M}_f(D)=\nu-1. \quad \square$$

与定理 9.2.5 一样，不难证明：

定理 9.3.5　非空无环有向图 D 的子图 T 是 D 的支撑树，当且仅当 T 的弧在 $\boldsymbol{M}_f(D)$ 中对应的列组成的子矩阵是非奇异的. □

9.3.3　圈矩阵

设有向图 D 有 ε 条弧和 n 个圈. 对于 D 中任何圈 C_i，给它一个定向，C_i 中方向与该定向相同的弧的全体记为 C_i^+，C_i 中方向与该定向相反的弧的全体记为 C_i^-，$i=1,2,\cdots,n$，令

$$c_{ij}=\begin{cases}1, & \text{弧 } a_j\in C_i^+,\\ -1, & \text{弧 } a_j\in C_i^-,\\ 0, & \text{否则},\end{cases}$$

则称 $n\times\varepsilon$ 矩阵 $\boldsymbol{C}(D)=(c_{ij})$ 为 D 的圈矩阵.

显然，D 中圈 C 的定向发生变化，仅仅改变 $\boldsymbol{C}(D)$ 中与 C 相对应的行中元素的符号.

图 9.3.3 有向图 D 中圈定向后的圈矩阵为

$$\boldsymbol{C}(D)=\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccc}a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7\end{array}\\ \begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{c}C_1\\ C_2\\ C_3\\ C_4\\ C_5\\ C_6\end{array}.$$

同图一样，有向图的关联矩阵与圈矩阵也有下面的关系：

定理 9.3.6　设 D 是含有圈的无环有向图，则

$$\boldsymbol{M}(D)\cdot\boldsymbol{C}^T(D)=\boldsymbol{0},$$
$$\boldsymbol{C}(D)\cdot\boldsymbol{M}^T(D)=\boldsymbol{0}.$$

证明　设 $\boldsymbol{M}_i$ 为 $\boldsymbol{M}(D)$ 的第 i 行，它对应于顶点 v_i；$\boldsymbol{C}_j$ 是 $\boldsymbol{C}(D)$ 的第 j 行，它对应于圈 C_j，只要证明内积 $(\boldsymbol{M}_i,\boldsymbol{C}_j)=0$.

若 v_i 不在 C_j 上，则与 v_i 关联的弧都不在 C_j 上，显然 $(\boldsymbol{M}_i,\boldsymbol{C}_j)=0$.

若 v_i 在 C_j 上，则与 v_i 关联的弧中只有两条 a_p 和 a_q 在 C_j 上. 当 v_i 同为 a_p 和

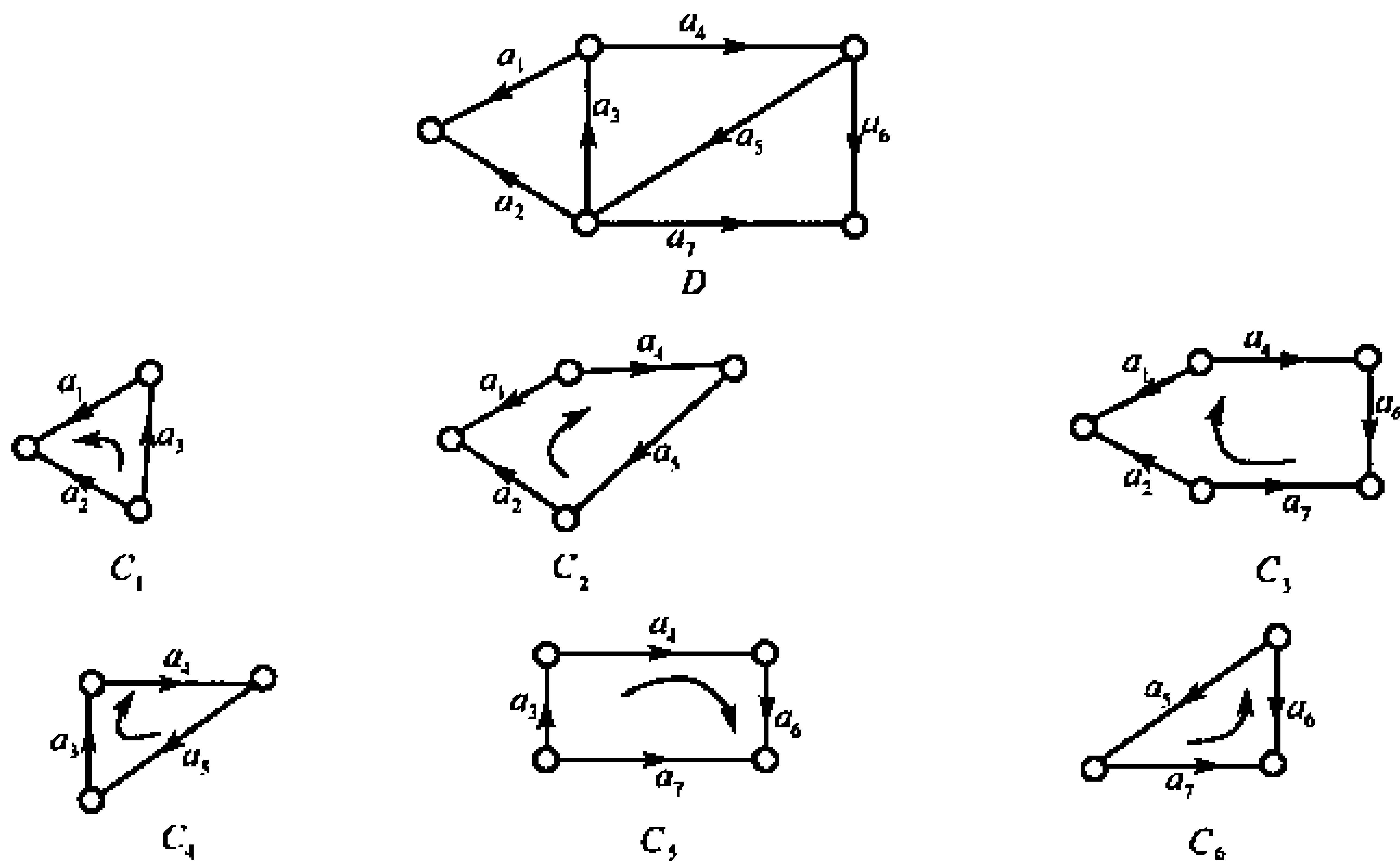


图 9.3.3 有向图 D 及其圈的定向

a_q 的头或尾时，M_i 的第p个分量和第q个分量同号，而 C_j 的第p个分量和第q个分量异号，因此$(M_i, C_j) = 0$；否则，M_i 的第p个分量和第q个分量异号，此时 C_j 的第 p 个分量和第q 个分量同号，也有$(M_i, C_j) = 0$. □

9.3.4 补圈矩阵

设有向图 D 有ε 条弧和m 个补圈. 对于 D 中补圈$Q_i = [S_i, \overline{S}_i]$，给它一个定向(从 S_i 到$\overline{S}_i$ 或者从$\overline{S}_i$ 到S_i)，Q_i 中方向与该定向相同的弧的全体记为Q_i^+，并令 $Q_i^- = Q_i \setminus Q_i^+$，$i = 1, 2, \cdots, m$，令

$$q_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{弧 } a_j \in Q_i^+, \\ -1, & \text{弧 } a_j \in Q_i^-, \\ 0, & \text{弧 } a_j \notin Q_i, \end{cases}$$

则称 $m \times \varepsilon$ 矩阵$Q(D) = (q_{ij})$ 为 D 的补圈矩阵.

同样，D 中补圈Q 的定向发生变化，仅仅改变 $Q(D)$ 中与 Q 相对应的行中元素的符号.

有向图的圈矩阵与补圈矩阵也有类似于图的圈矩阵与补圈矩阵的关系.

定理 9.3.7 设有向图 D 含有连杆和圈，则

$$C(D) \cdot Q^T(D) = 0,$$
$$Q(D) \cdot C^T(D) = 0.$$

证明　设 C_i 是 $C(D)$ 的第 i 行，它对应于圈 C_i；Q_j 是 $Q(D)$ 的第 j 行，它对应于补圈 Q_j。只须证明 $(C_i, Q_j) = 0$.

我们知道，圈 C_i 与补圈 Q_j 必有偶数条公共弧.

若 C_i 与 Q_j 无公共弧，则显然 $(C_i, Q_j) = 0$.

若 C_i 与 Q_j 有 $2t_{ij}(t_{ij} \geqslant 1)$ 条公共弧，则把这些公共弧在 C_i 上出现的顺序依次配成 t_{ij} 对，设 a_p 和 a_q 是任意一对这样的弧. 当 a_p 和 a_q 同属于 C_i^+ 或 C_i^- 时，C_i 的第 p 个分量和第 q 个分量必定同号，此时 a_p 和 a_q 必分属于 Q_j^+ 和 Q_j^-，从而 Q_j 的第 p 个分量和第 q 个分量异号，因此 $(C_i, Q_j) = 0$；否则，C_i 的第 p 个分量和第 q 个分量异号，而 Q_j 的第 p 个分量和第 q 个分量同号，也有 $(C_i, Q_j) = 0$.

□

给定含圈的连通无环有向图 D 的一个支撑树 T，同 9.2.4 节一样，定义 D 的基本圈矩阵 $C_f(D)$ 和基本补圈矩阵 $Q_f(D)$，如果把 $A(D)$ 排成如下顺序：

$$a_{j_1}, a_{j_2}, \cdots, a_{j_{\varepsilon-\nu+1}}, a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_{\nu-1}},$$

前 $\varepsilon - \nu + 1$ 条弧属于 $\overline{T}$，后 $\nu - 1$ 条弧属于 T，并且把 D 中含 a_{j_t} 的基本圈记为第 t 个圈 $(1 \leqslant t \leqslant \varepsilon - \nu + 1)$，规定其定向与 a_{j_t} 的方向相同；把 D 中含 a_{i_s} 的基本补圈记为第 s 个补圈 $(1 \leqslant s \leqslant \nu - 1)$，规定其定向与 a_{i_s} 的方向相同，则类似于式(9.2.1) ~ (9.2.3)，有：

$$C_f(D) = [I_{\varepsilon-\nu+1}, C_{12}], \tag{9.3.1}$$

$$Q_f(D) = [Q_{11}, I_{\nu-1}], \tag{9.3.2}$$

$$M_f(D) = [M_{11}, M_{12}]. \tag{9.3.3}$$

同定理 9.2.10 一样，利用定理 9.3.6 和定理 9.3.7 类似可证定理 9.3.8.

定理 9.3.8　设 D 是含圈的连通无环有向图，且 $C_f(D)$，$Q_f(D)$ 和 $M_f(D)$ 已表示成式(9.3.1) ~ (9.3.3) 的形式，则

$$C_{12} = -M_{11}^T \cdot (M_{12}^T)^{-1},$$

$$Q_{11} = -C_{12}^T = (M_{12})^{-1} \cdot M_{11}.$$

□

对于含圈的连通无环有向图 D，根据式(9.3.1) ~ (9.3.2) 式知，$\text{rank}C_f(D) = \varepsilon - \nu + 1$，$\text{rank}Q_f(D) = \nu - 1$，于是 $\text{rank}C(D) \geqslant \varepsilon - \nu + 1$，$\text{rank}Q(D) \geqslant \nu - 1$.

又由定理 9.3.6 和定理 9.3.2，得

$$\text{rank}C(D) \leqslant \varepsilon - \text{rank}M(D) = \varepsilon - \nu + 1,$$

故 $\text{rank}C(D) = \varepsilon - \nu + 1$，从而由定理 9.3.7 知

$$\text{rank}Q(D) \leqslant \varepsilon - \text{rank}C(D) = \nu - 1,$$

即 $\text{rank}Q(D)=\nu-1$，因此我们得到

定理 9.3.9 设 D 是含有圈和连杆的连通有向图，则

$$\text{rank}C(D)=\text{rank}C_f(D)=\varepsilon-\nu+1,$$
$$\text{rank}Q(D)=\text{rank}Q_f(D)=\nu-1. \qquad \square$$

同图一样，有向图 D 的圈矩阵 $C(D)$ 的行向量在实数域 $\mathbb{R}$ 上所生成的向量空间称为 D 的圈空间，记为 $\mathscr{C}(D)$；D 的补圈矩阵 $Q(D)$ 的行向量在实数域 $\mathbb{R}$ 上所生成的向量空间称为 D 的补圈空间，记为 $\mathscr{S}(D)$.

推论 9.3.10 设 $X=\begin{bmatrix}X_c\\X_t\end{bmatrix}$，$Y=\begin{bmatrix}Y_c\\Y_t\end{bmatrix}$ 均为 ε 维列向量，其中 X_c 和 Y_c 为 $\varepsilon-\nu+1$ 维列向量，X_t 和 Y_t 为 $\nu-1$ 维列向量，则在定理 9.3.8 的假设下，有下面两个结论：

(1) 方程组 $MX=0$，$M_fX=0$ 及 $Q_fX=0$ 同解，且其解 X 满足

$$X_t=-Q_{11}X_c,\ X=C_f^TX_c;$$

(2) 方程组 $CY=0$ 与 $C_fY=0$ 同解，其解 Y 满足

$$Y_c=-C_{12}Y_t,\ Y=Q_f^TY_t.$$

证明 首先由推论 9.3.4 及定理 9.3.9 知，方程组 $MX=0$ 与 $M_fX=0$ 同解，$CY=0$ 与 $C_fY=0$ 同解.

(1)
$$M_fX=0\Leftrightarrow[M_{11},M_{12}]\begin{bmatrix}X_c\\X_t\end{bmatrix}=0$$
$$\Leftrightarrow M_{11}X_c+M_{12}X_t=0$$
$$\Leftrightarrow(M_{12}^{-1}M_{11})X_c+X_t=0.$$

由 $Q_{11}=M_{12}^{-1}M_{11}$ 知 $M_fX=0\Leftrightarrow Q_{11}X_c+X_t=0\Leftrightarrow X_t=-Q_{11}X_c$.

另一方面，由 $-C_{12}^T=M_{12}^TM_{11}$ 知

$$M_fX=0\Leftrightarrow -C_{12}^TX_c+X_t=0$$
$$\Leftrightarrow X_t=C_{12}^TX_c$$
$$\Leftrightarrow X=\begin{bmatrix}X_c\\X_t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_{\varepsilon-\nu+1}\\C_{12}^T\end{bmatrix}X_c=C_f^TX_c.$$

(2)
$$C_fY=0\Leftrightarrow[I_{\varepsilon-\nu+1},C_{12}]\begin{bmatrix}Y_c\\Y_t\end{bmatrix}=0$$
$$\Leftrightarrow Y_c+C_{12}Y_t=0$$
$$\Leftrightarrow Y_c=-C_{12}Y_t.$$

另一方面，由 $C_{12}=-Q_{11}^T$ 知

$$Y=\begin{bmatrix}Y_c\\Y_t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Q_{11}^T\\I_{\nu-1}\end{bmatrix}Y_t=Q_f^TY_t.$$ □

推论9.3.10在电网络方程中有重要的应用.1847年,Kirchhoff给出了电网络理论中两条最重要的定律,一是Kirchhoff电流定律(KCL):电网络中各个节点上各支路电流代数和为零;另一个是Kirchhoff电压定律(KVL):电网络中每一圈路内各支路电压代数和为零.我们把电网络中的各节点视为顶点,各支路视为弧,弧的方向与电流(或电压)的方向一致,这样就可以把一个电网络抽象成一个有向图.例如图9.3.4中所示的电网络和对应的有向图.于是,用图论的语言,KCL

图9.3.4　电网络及其相应的有向图

和KVL分别可以表述为 $MX=0$ 和 $CY=0$,其中 M 为 D 的关联矩阵,C 为 D 的圈矩阵,X 和 Y 均为 ε 维列向量,分别称为电流列向量和电压列向量.利用推论9.3.10可以将电网络方程 $MX=0$ 和 $CY=0$ 化简.

例9.3.1　考虑如图9.3.4所示的电网络和对应的有向图 D.取 D 中支撑树 T 为由 $\{a_3,a_4,a_5\}$ 导出的子图,则相应于 T 的基本圈矩阵 $C_f(D)$ 和基本补圈矩阵 $Q_f(D)$ 分别为

$$C_f(D)=\begin{matrix} & \begin{matrix}a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5\end{matrix} & \\ & \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -1 & -1\\0 & 1 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix} & \begin{matrix}C_1\\C_2\end{matrix}\end{matrix},$$

$$Q_f(D)=\begin{matrix} & \begin{matrix}a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5\end{matrix} & \\ & \begin{bmatrix}0 & -1 & 1 & 0 & 0\\1 & -1 & 0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} & \begin{matrix}Q_1\\Q_2\\Q_3\end{matrix}\end{matrix}$$

设电流列向量和电压列向量分别为

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}, \qquad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix}.$$

则 Kirchhoff 电流定理 $\boldsymbol{MX} = \boldsymbol{0}$ 可化简为 $\boldsymbol{Q}_f\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$，即为

$$\boldsymbol{0} = \boldsymbol{Q}_f\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 + x_3 \\ x_1 - x_2 + x_4 \\ x_1 + x_5 \end{bmatrix},$$

且

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{C}_f^T\boldsymbol{X}_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \\ -x_1 + x_2 \\ -x_1 \end{bmatrix}.$$

Kirchhoff 电压定律 $\boldsymbol{CY} = \boldsymbol{0}$ 可化简为 $\boldsymbol{C}_f\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{0}$，即为

$$\boldsymbol{0} = \boldsymbol{C}_f\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 - y_4 - y_5 \\ y_2 + y_3 + y_4 \end{bmatrix},$$

且

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Q}_f^T\boldsymbol{Y}_t = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_4 + y_5 \\ -y_3 - y_4 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix}.$$

□

9.4 矩阵－树定理

首先介绍一个概念：如果一个矩阵的任何方阵的行列式等于 1，－1 或 0，则称该矩阵为全单位模矩阵(total unimodular matrix)．

不难知道，全单位模矩阵的一个明显的必要条件是它的元素为 1，-1 或 0，下面的定理给出了全单位模矩阵的一个充分条件.

定理 9.4.1　设 $B = (b_{ij})$，且对一切 i 和 j，$b_{ij} = 1, -1$ 或 0，如果下面两个条件都满足，则 B 是全单位模矩阵.

(1) B 的每一列最多有两个非零元素；

(2) B 的行可分划成两个子集 R_1 和 R_2，使得对于同一列中两个非零元素，当这两个非零元素符号相同时，对应的两行在不同的行子集中；当符号不同时，对应的两行在同一行子集中.

证明　只需证明 B 的任何一个子方阵 B' 的行列式 $|B'| = 1, -1$ 或 0. 设 B' 是 n 阶方阵，对 n 进行归纳. 若 $n = 1$ 时，则显然成立.

由于 B 满足(1) 和(2)，因此 B 的任何子矩阵也满足这两个条件. 假设 B 的任何 k 阶子方阵的行列式等于 1，-1 或 0，任取 B 的 $k+1$ 阶子方阵 B'，它也满足条件(1) 和(2)，如果 B' 的某一列恰有一个非 0 元素，记该元素在 B' 中的余子式为 b，则 $|B'| = \pm b$，由归纳假设，$b = 1, -1$ 或 0，从而 $|B'| = 1, -1$ 或 0；如果 B' 的每一列恰有两个非零元素，则对 B' 中任何列 j，有

$$\sum_{i \in R_1} b_{ij} = \sum_{i \in R_2} b_{ij}.$$

把 B' 的第 i 行记为 B_i'，则 $\sum\limits_{i \in R_1} B'_i - \sum\limits_{i \in R_2} B'_i = 0$，即 B' 的所有行向量是线性相关的，故 $|B'| = 0$. □

定理 9.4.2　非空无环有向图的关联矩阵是全单位模的.

证明　设 D 是非空无环有向图，因为 $M(D)$ 的每列恰有两个元素非零：1 和 -1，所以把 $M(D)$ 的行分划成两个部分 R_1 和 R_2，其中 $R_2 = \varnothing$，于是由定理 9.4.1 知结论成立. □

顺便指出：图的关联矩阵不一定是全单位模矩阵，例如 $|M(K_3)| = 2$.

根据定理 9.3.5 可知，非空无环有向图 D 中支撑树的数目等于 D 的基本关联矩阵 $M_f(D)$ 中非奇异的 $\nu - 1$ 阶子方阵的个数，由定理 9.4.2 知，这又等于 $M_f(D)$ 中行列式为 ± 1 的 $\nu - 1$ 阶子方阵的个数. 根据关于矩阵乘积行列式的 Binet-Cauchy 定理又有

$$|M_f(D) \cdot M_f^T(D)| = \sum (M_f(D) \text{ 的 } \nu - 1 \text{ 阶子方阵的行列式})^2.$$

而上式右端每个非零项恰好等于 1，所以上式右端的值等于 D 中不同的支撑树的数目. 与 2.5 节一样，记 D 中不同的支撑树的数目为 $\tau(D)$，则得到 Kirchhoff(1847) 证明的一个求 $\tau(D)$ 的方式，我们称之为矩阵 - 树定理.

定理 9.4.3(矩阵 - 树定理)　设 D 为非空无环的连通有向图，则

$$\tau(D) = \left|M_f(D) \cdot M_f^T(D)\right|. \qquad \Box$$

现在可以给出求连通图 G 的支撑树数目的另一个方法.

首先删去 G 的所有的环得到图 G_1,则 $\tau(G) = \tau(G_1)$.若 $G_1 = K_1$,则 $\tau(G_1) = 1$;若 G_1 为非空图,则把 G_1 的边任意定向,得到非空无环连通有向图 D,且 $\tau(G_1) = \tau(D)$,再利用矩阵-树定理求出 $\tau(D)$.

例 9.4.1 求图 9.4.1(a) 中图 G 的支撑树数目 $\tau(G)$.

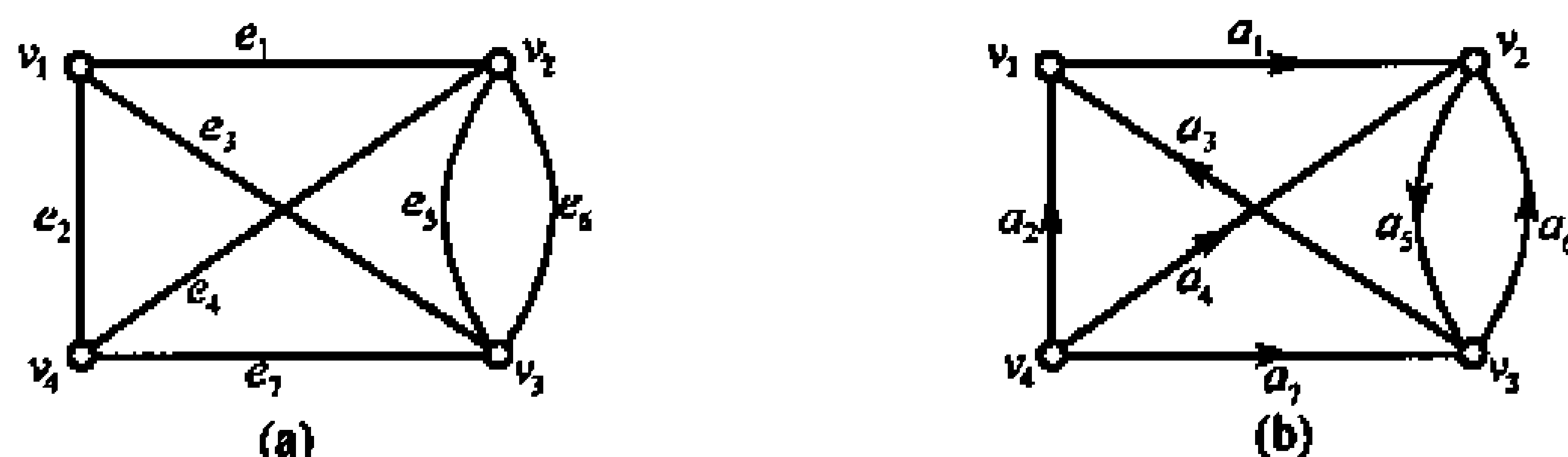


图 9.4.1 图 G 及其定向图 D

解 先把图 G 的边任意定向化为有向图 D,见图 9.4.1(b).

以 v_4 为参考点,得基本关联矩阵

$$M_f(D) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

从而

$$\tau(G) = \tau(D) = \left|M_f(D) \cdot M_f^T(D)\right| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 24. \qquad \Box$$

利用矩阵-树定理可以得到求非空无环连通图中不同支撑树的数目的一个简单公式.

设 G 是非空无环连通图,$V(G) = \{v_1, v_2, \cdots, v_\nu\}$,定义一个 $\nu \times \nu$ 的对角矩阵 $\boldsymbol{D}(G) = (d_{ij})$,其中

$$d_{ij} = \begin{cases} d_G(v_i), & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

设 G 的定向图为 D,

$$M(D) = (m_{ij})_{\nu \times \varepsilon}, \quad M(D) \cdot M^T(D) = (b_{ij})_{\nu \times \nu}$$

则

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^{\varepsilon} m_{ik} m_{jk}, \qquad i, j = 1, 2, \cdots, \nu.$$

由于 D 的每个顶点 v_i 恰好与 $d_G(v_i)$ 条弧关联，因此，$\boldsymbol{M}(D)$ 的第 i 行恰有 $d_G(v_i)$ 个非零元素(1 或 -1)，故

$$b_{ii} = \sum_{k=1}^{\varepsilon}(m_{ik})^2 = d_G(v_i), \qquad i = 1,2,\cdots,\nu.$$

设 G 的邻接矩阵 $\boldsymbol{A}(G) = (a_{ij})_{\nu\times\nu}$，则 D 的任何两个顶点 v_i 和 $v_j(i \neq j)$ 之间有 a_{ij} 条弧，从而 $\boldsymbol{M}(D)$ 的第 i 行和第 j 行中，恰有 a_{ij} 个位置上，这两个行向量的分量一个为 1，而另一个为 -1，于是

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^{\varepsilon} m_{ik}m_{jk} = -a_{ij}, \qquad i,j = 1,2,\cdots,\nu, i \neq j,$$

这就证明了

$$\boldsymbol{M}(D)\cdot\boldsymbol{M}^T(D) = \boldsymbol{D}(G) - \boldsymbol{A}(G).$$

设 $\boldsymbol{M}_f(D)$ 是 D 的基本关联矩阵，v_i 为参考点，则 $\boldsymbol{M}_f(D)\cdot\boldsymbol{M}_f^T(D)$ 就是 $\boldsymbol{M}(D)\cdot\boldsymbol{M}^T(D)$ 中删去第 i 行和第 i 列后得到的矩阵，因此，$\boldsymbol{M}_f(D)\cdot\boldsymbol{M}_f^T(D)$ 就是在 $\boldsymbol{D}(G)-\boldsymbol{A}(G)$ 中删去第 i 行和第 i 列后的矩阵．用 $\Delta_i(G)$ 表示删去矩阵 $\boldsymbol{D}(G)-\boldsymbol{A}(G)$ 的第 i 行和第 i 列后得到的矩阵的行列式，于是，由矩阵 – 树定理立即得到

推论 9.4.4　设 G 为非空无环连通图，则

$$\tau(G) = \Delta_i(G), \qquad i = 1,2,\cdots,\nu(G). \qquad \square$$

例 9.4.2　求图 9.4.1(a) 中图 G 的支撑树数目 $\tau(G)$．

解　易知

$$\boldsymbol{D}(G)-\boldsymbol{A}(G) = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix},$$

从而

$$\tau(G) = \Delta_1(G) = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 24. \qquad \square$$

用推论 9.4.4 求 $\tau(G)$ 比用矩阵 – 树定理求要简单些．最后，我们应用推论 9.4.4 来重新推导求完全图的支撑树数目的 Cayley 公式．

推论 9.4.5(Cayley, 1918)　$\tau(K_n) = n^{n-2}$．

证明　不难知道 $\boldsymbol{D}(K_n)-\boldsymbol{A}(K_n)$ 的主对角线上的元素均为 $n-1$，而其他各元素均为 -1，即

$$D(K_n)-A(K_n)=\begin{bmatrix} n-1 & & & -1 \\ & n-1 & & \\ & & \ddots & \\ -1 & & & n-1 \end{bmatrix}_{n\times n},$$

所以 $\Delta_1(K_n)$ 为 $n-1$ 阶行列式，主对角线上的元素均为 $n-1$，其余各元素均为 -1，将 $\Delta_1(K_n)$ 的各行都加到第 1 行，再将第 1 行分别加到各行，即得

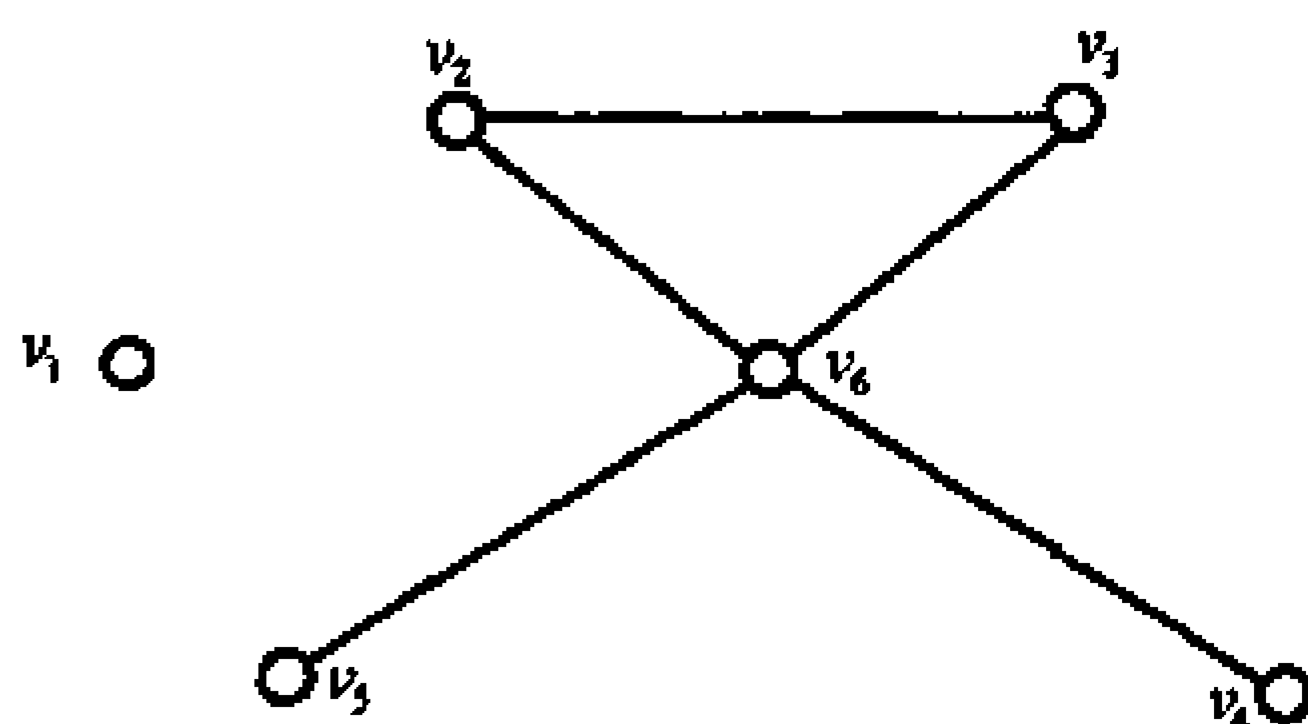
$$\Delta_1(K_n)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}_{(n-1)} = n^{n-2},$$

即

$$\tau(K_n)=n^{n-2}$$ □

习题九

1. 写出题图 9.1 的邻接矩阵和关联矩阵.



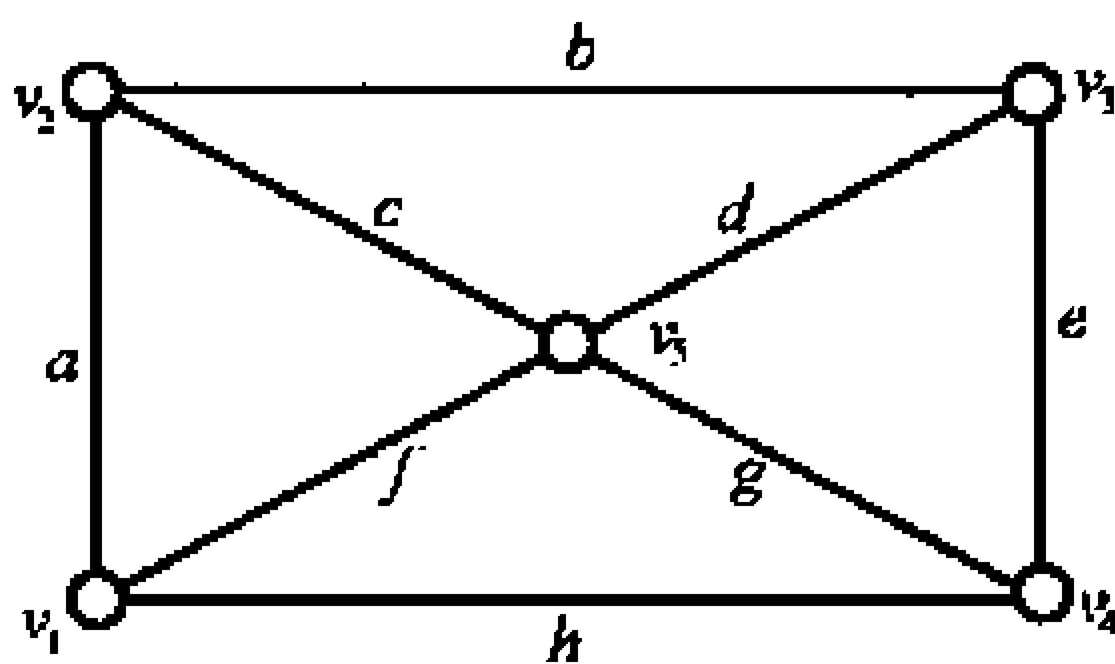
题图 9.1

2. 求图 G，使得

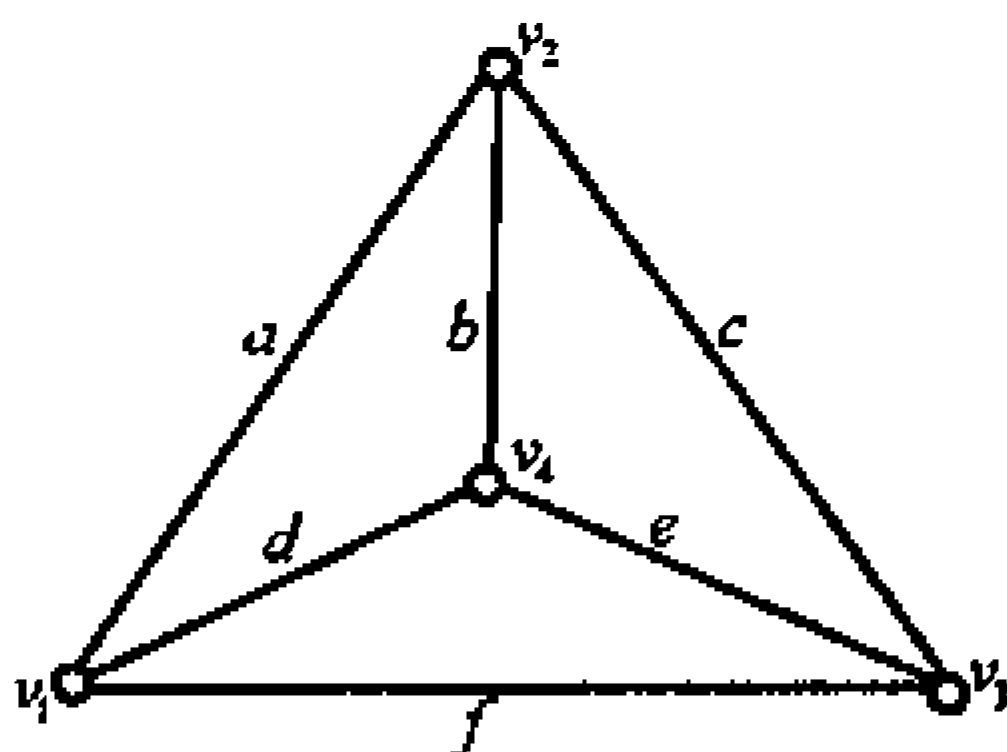
$$M(G)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. 求出题图9.2关于支撑树 $T=G[\{c,d,f,g\}]$ 的基本关联矩阵、基本圈矩阵及基本补圈矩阵.

4. 写出题图 9.3 的关联矩阵 M，并由关联矩阵求出该图的基本圈矩阵.



题图 9.2



题图 9.3

5. 设 G 是二部图，证明 G 的顶点可以适当标号，使得 $\boldsymbol{A}(G)$ 呈如下形式

$$\boldsymbol{A}(G)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}_{21}=\boldsymbol{A}_{12}^{T}$.

6. 已知图 G 的邻接矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix},$$

不许画图，论证 G 是否连通.

7. 已知连通图 G 的基本圈矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{array}{c}\begin{matrix}a&b&c&d&e&f&g\end{matrix}\\ \begin{bmatrix}1&0&0&1&1&0&0\\0&1&0&0&1&1&0\\0&0&1&0&0&1&1\end{bmatrix}\end{array},$$

不许画图，回答是否：

(1) $\{b,c,e,f\}$ 导出支撑树；

(2) $\{a,c,e,f\}$ 导出支撑树；

(3) $\{a,b,e,g\}$ 是边割；

(4) $\{b,f,c\}$ 是边割；

(5) $\{d,e,f,g\}$ 是边割；

(6) $\{a,b,c,d,g\}$ 导出一个圈；

(7) $\{a,c,d,e,g,f\}$ 导出一个圈.

8. $\boldsymbol{A}$ 是图 G 的邻接矩阵，

(1) $\boldsymbol{A}^2$ 主对角线之和为 100，求 $\varepsilon(G)=?$

(2) $\boldsymbol{A}^3$ 主对角线之和为 600，求 G 中三角形数目.

9. 已知有向图 D 的邻接矩阵是

$$\boldsymbol{A}(D)=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix},$$

不许画图，回答 D 是否强连通，为什么？

10. 证明 $\tau(K_{m,n})=m^{n-1}n^{m-1}$.

11. 已知 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的左下角及主对角线右邻的元素为 1，其余元素皆为 0，试用图论方法求：

(1) $\boldsymbol{A}^2$ 主对角线元素之和；

(2) $\boldsymbol{A}^3$ 主对角线元素之和.

12. $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{\nu\times\nu}$ 是图 G 的邻接矩阵.

(1) 对任一自然数 k，$\boldsymbol{A}^{2k-1}$ 主对角线元素之和为 0，$\varepsilon(G)\neq 0$，求 $\chi'(G)$；

(2) 对任一自然数 k，$\boldsymbol{A}^{2k-1}$ 主对角线元素之和为 0，$\varepsilon(G)\neq 0$，求 $\chi(G)$.

13. 有向图 D 的关联矩阵为

$$\boldsymbol{M}(D)=\begin{bmatrix}1&1&1&0&0&0\\-1&0&0&-1&0&1\\0&0&-1&0&-1&-1\\0&-1&0&1&1&0\end{bmatrix},$$

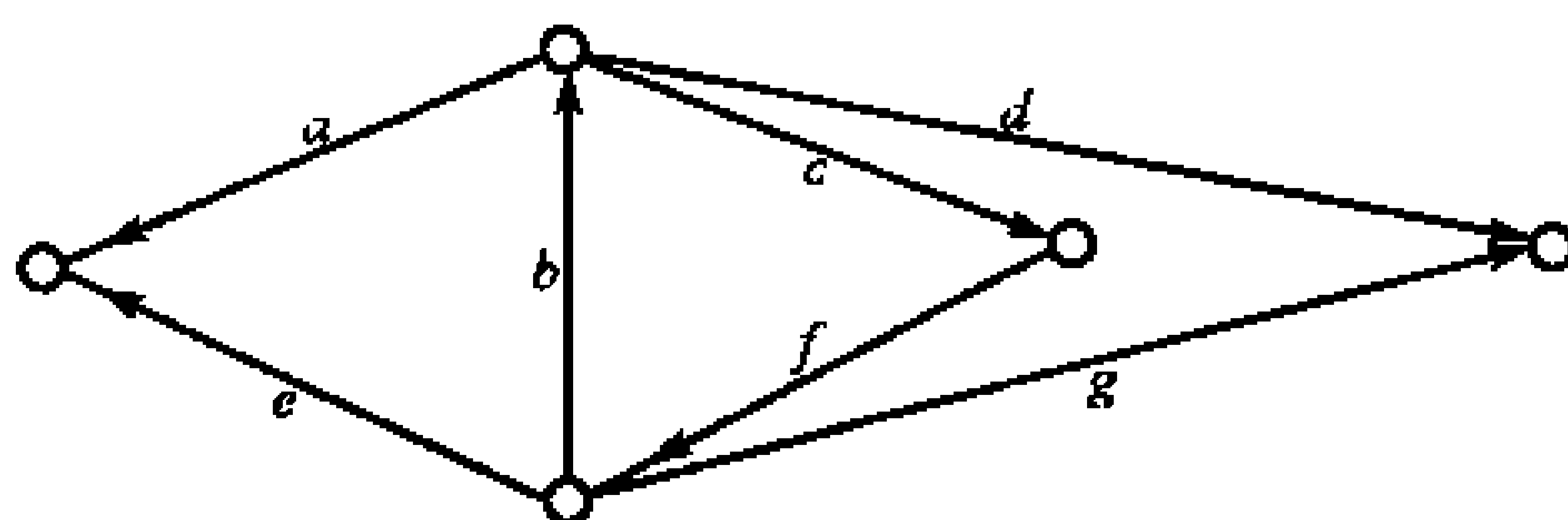
求 $\tau(D)$，并画出所有支撑树.

14. 写出题图 9.4 中关于支撑树 $T=D[\{a,b,c,d\}]$ 的基本圈矩阵和基本补圈矩阵.

15. 图 G 的邻接矩阵 $\boldsymbol{A}(G)$ 的特征多项式

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\lambda^{\nu}+c_1\lambda^{\nu-1}+c_2\lambda^{\nu-2}+\cdots+c_{\nu},$$

称为图 G 的特征多项式(其中 $\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵). $\boldsymbol{A}(G)$ 的特征值及其重数称为图 G 的谱. 证明：若 G 是简单图，则有 $c_1=0$，$c_2=-\varepsilon(G)$，$-c_3$ 是 G 中含有不同的 K_3 子图的个数的两倍.



题图 9.4

16. 图 G 是连通图当且仅当 $(A+I)^{\nu-1}$ 中无零元素.

第十章　数的计数与 Pólya 计数定理

图的计数是图论中的经典内容，它的先驱是 Cayley，Redfield 和 Pólya．历史上最早的计数问题是从顶点有标号的图（即标号图）开始的．图 10.1 中列出了全部三阶标号图共8个．如果去掉顶点标号，则全部三阶简单图就只有4个（即在同构意义下的等价类有 4 个），如图 10.2 所示．按照边的有无，易知 n 阶标号图共有

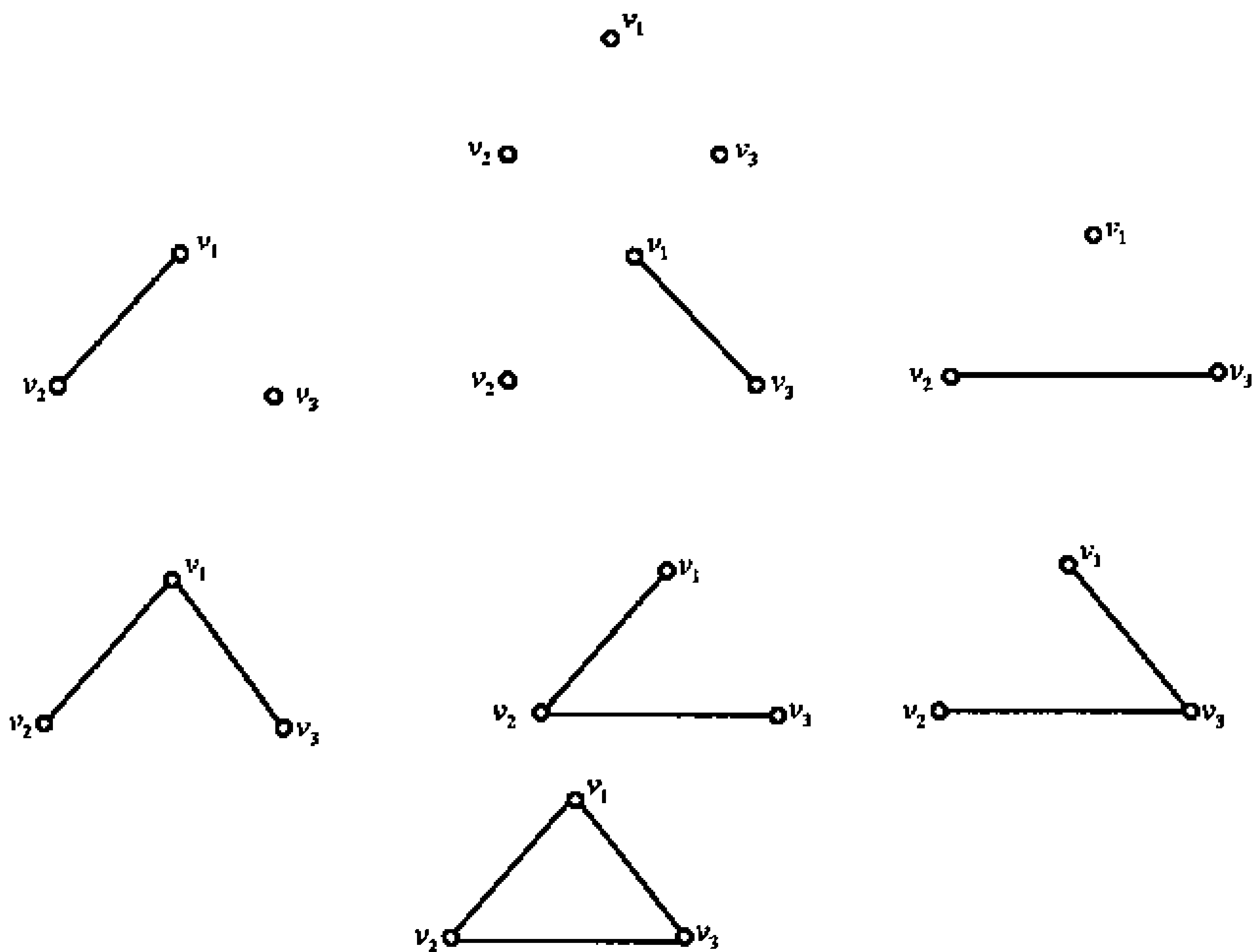


图 10.1　全部三阶标号图

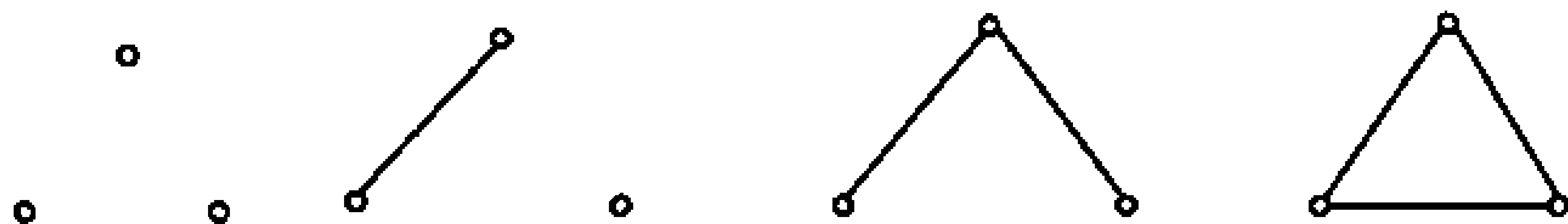


图 10.2　全部三阶简单图

$2^{\binom{n}{2}}$ 个，m 条边的 n 阶标号图则有 $\binom{\binom{n}{2}}{m}$ 个. 我们已经知道 n 阶标号树有 n^{n-2} 个(Cayley 公式). 如果去掉顶点标号，则 n 阶简单图的数目和 n 阶支撑树的数目就不那么容易求解了，因为此时考察的是在同构意义下等价类的数目.

本章我们先介绍置换群的基本知识，再介绍同构图的计数和 Pólya 计数定理，最后介绍图的计数. 无特殊声明，本章中的图均指顶点无标号的图.

10.1　置换群的基本知识

集合 H 和 H 上的二元运算"·"，如果满足：

(1) "·"运算在 H 上是封闭的，即 $\forall a,b \in H$，有 $a \cdot b \in H$;

(2) "·"运算满足结合律，即 $\forall a,b,c \in H$，有 $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$;

(3) 存在 $e \in H$，使得 $\forall a \in H$，满足 $a \cdot e = e \cdot a = a$，称 e 为 H 的单位元;

(4) $\forall a \in H$，存在 $a^{-1} \in H$，使得 $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$，称 a^{-1} 为 a 的逆元，

则称代数结构 $(H, \cdot)$ 为群(group).

在群 $(H, \cdot)$ 中，$\forall a \in H$，我们定义 a 的方幂如下：

$$a^0 = e, a^1 = a, a^{n+1} = a^n \cdot a,$$

其中 n 为自然数.

对于 H 中的元素 a，若存在 $m > 0$，m 是满足 $a^m = e$ 的最小正整数，则称 a 是 m 阶元，若这样的 m 不存在，则称 a 是无限阶的. 如果 H 是有限集合，则称 $|H|$ 是群的阶，在 n 阶群中任何元素的阶均是 n 的因子. 当 H 是有限群时，若 H 的非空子集 L 满足对 $\forall a,b \in L$，有 $a \cdot b \in L$，则称 L 为 H 的子群(subgroup).

集合 A 到自身的一个一一对应称为是 A 上的一个置换(permutation). 若 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，则 A 上的置换 φ 常可表示为：

$$\varphi = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \varphi(a_1) & \varphi(a_2) & \cdots & \varphi(a_n) \end{pmatrix}.$$

A 上两个置换 f, g 的二元运算"·"称为乘积，定义为它们的复合映射，即 $f \cdot g(a) = f(g(a))(\forall a \in A)$. A 上全体 $|A|!$ 个置换在这样定义的二元运算下构成群，称为 A 上的 n 阶对称群(symmetric group)，记作 S_A. S_A 的任一子群称为是 A 上的一个置换群(permutation group).

记 $I_n = \{1, 2, \cdots, n\}$，$I_n$ 上的对称群记为 S_n. 易见

$$S_3 = \left\{\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}\right\},$$

其中有 $3! = 6$ 个置换.

例 10.1.1　在平面上取定一个正 n 边形($n \geqslant 3$).从某顶点起按顺时针方向把各顶点标号为 $1,2,\cdots,n$,称这个平面正 n 边形为定盘.设有一个与定盘重合的正 n 边形,称之为动盘.现使动盘围绕其中心在定盘上旋转,为使旋转后,动盘与定盘仍重合,则动盘只能旋转 $\frac{360^\circ}{n}, 2\cdot\frac{360^\circ}{n}, 3\cdot\frac{360^\circ}{n}, \cdots, n\cdot\frac{360^\circ}{n}$.这样便得到了动盘与定盘间的 n 个不同的位置关系,相应地确定了 n 个顶点集上的置换.当动盘旋转 $\frac{360^\circ}{n}$ 时,相应的置换为 $\begin{pmatrix}1&2&3&\cdots&n-1&n\\2&3&4&\cdots&n&1\end{pmatrix} \triangleq \sigma$.易见,当动盘旋转 $k\cdot\frac{360^\circ}{n}$ 时,相应的置换则为 $\sigma^k(1 \leqslant k \leqslant n)$.图 10.1.1 给出了当 $n = 6$ 的情形.

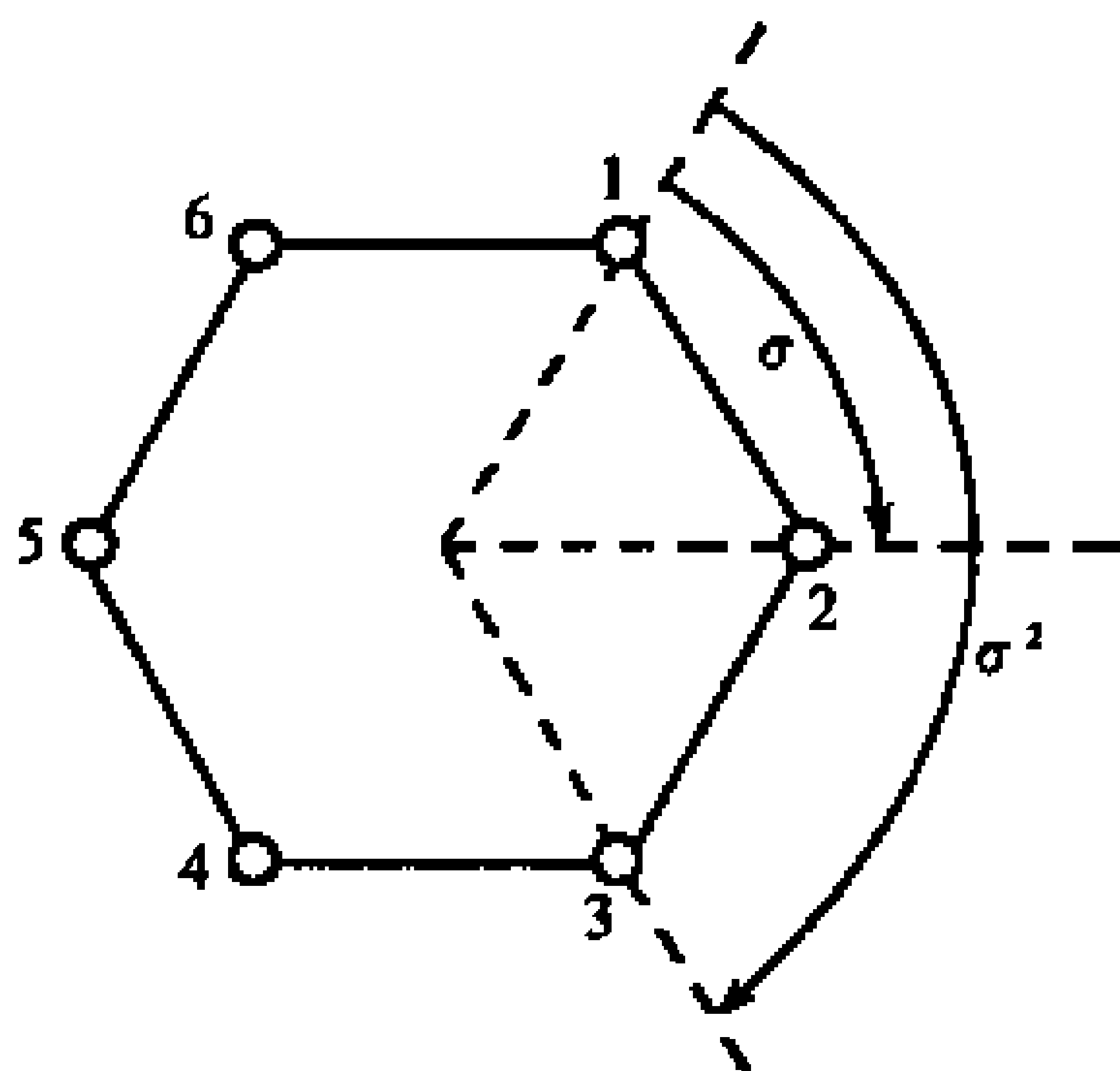


图 10.1.1　正六边形的旋转

σ 的诸幂次 $\sigma, \sigma^2, \cdots, \sigma^{n-1}, \sigma^n = e$ 构成了 S_n 的一个子群,称此置换群为由 σ 生成的 n 阶循环群(Cyclicgroup),记作 σ_n.　□

例 10.1.2　如果在例 10.1.1 中除了允许动盘作平面旋转外,还允许动盘作空间翻转,则为使动盘与定盘重合,除了例 10.1.1 中的 n 个平面旋转,还可以使动盘绕其对称轴翻转.正 n 边形共有 n 个对称轴,故相应地可以确定 n 个置换.设 $\tau = \begin{pmatrix}1&2&\cdots&n-1&n\\n&n-1&\cdots&2&1\end{pmatrix}$,则这 n 个置换为 $\tau\sigma, \tau\sigma^2, \cdots, \tau\sigma^{n-1}$.如图 10.1.2,给出了当 $n = 3, n = 6$ 的情形.

当 $n = 3$ 时,空间翻转确定的 3 个置换为

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix},$$

即为 $\tau\sigma$, τ 和 $\tau\sigma^2$.

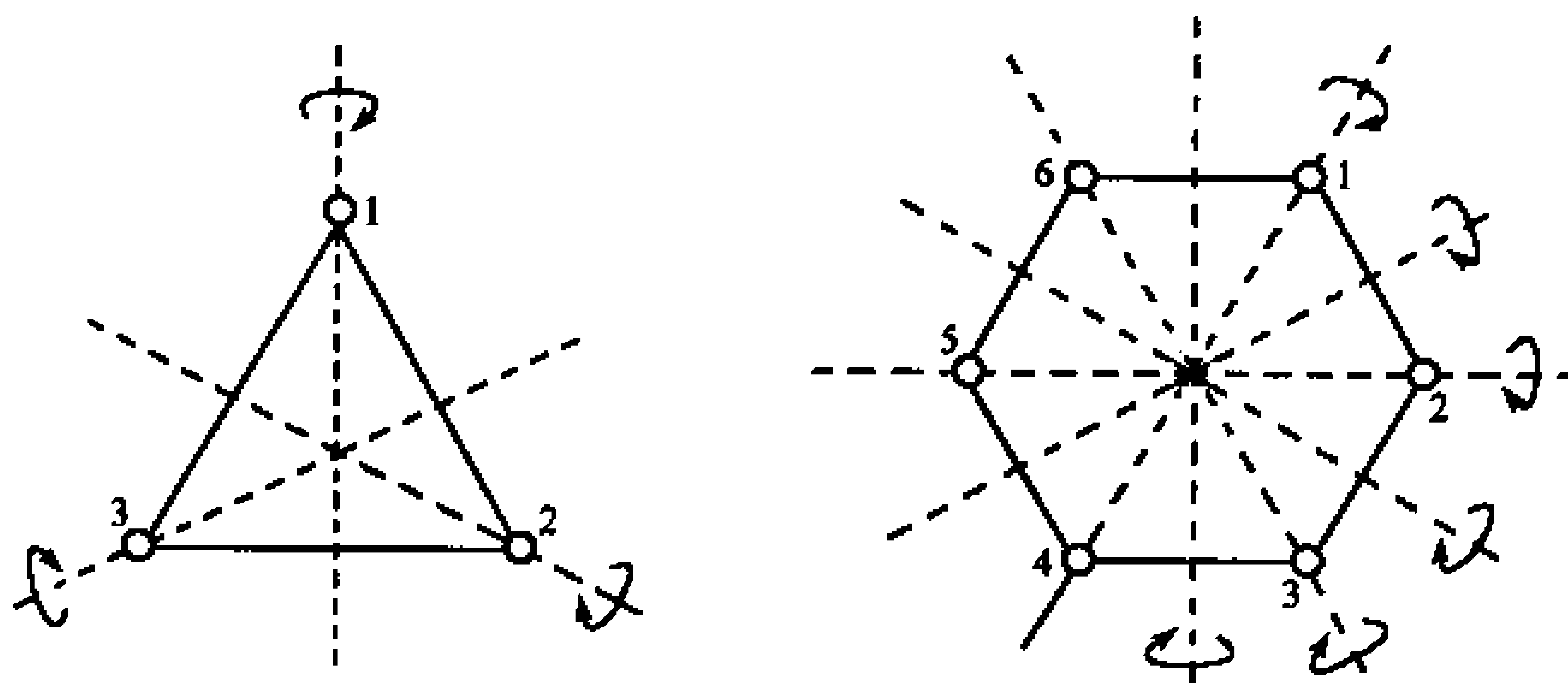


图 10.1.2　正三角形、正六边形的旋转

当 $n=6$ 时,空间翻转确定的 6 个置换为

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&6&5&4&3&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&2&1&6&5&4\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\5&4&3&2&1&6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&1&6&5&4&3\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\4&3&2&1&6&5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\6&5&4&3&2&1\end{pmatrix}.$$

即为 $\tau\sigma$, $\tau\sigma^3$, $\tau\sigma^5$, $\tau\sigma^2$, $\tau\sigma^4$ 和 τ.

$2n$ 个置换 $\sigma,\sigma^2,\cdots,\sigma^n,\tau,\tau\sigma,\cdots,\tau\sigma^{n-1}$ 也构成了 S_n 的一个子群,称此置换群为二面体群(dihedral group),记作 D_n. □

例 10.1.3(图的自同构群)　设 φ 是图 $G=(V,E)$ 的点集 V 到自身的一个双射,且满足:

$$(u,v)\in E \Leftrightarrow (\varphi(u),\varphi(v))\in E,(\forall u,v\in V),$$

则称 φ 是图 G 的一个自同构.易见 G 的全体自同构作成了顶点集 V 上的置换群,称为图 G 的自同构群,记作 $\Gamma(G)$.实际上,图 G 的一个自同构 φ 就是顶点集 $V(G)$ 上的一个保持边集 $E(G)$ 不变的置换.若图 G 为如图 10.1.3 中所示的 $K_{1,2}$,注意到 v_1 是 G 中惟一一个度为 2 的顶点,故若 $\varphi\in\Gamma(G)$,则在置换 φ 的作用下,顶点 v_1 必保持不动,于是有

$$\Gamma(G)=\left\{\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix},e\right\}.$$ □

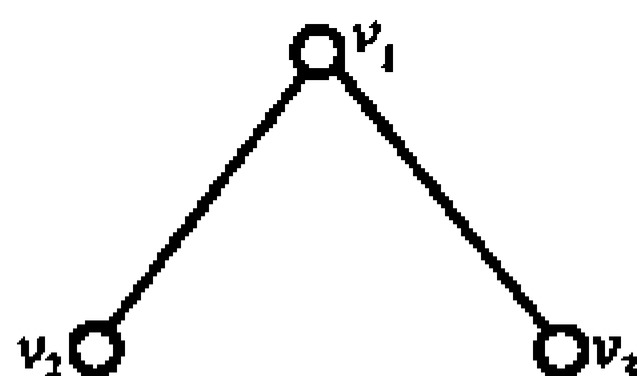


图 10.1.3 $K_{1,2}$

例 10.1.4 设 n 圈 C_n 的顶点集为 $V = I_n = \{1,2,\cdots,n\}$，如图 10.1.4 所示．求 n 圈 C_n 的自同构群 $\Gamma(C_n)$．

解 设 φ 是 C_n 的一个自同构，即 $\varphi \in S_n$ 且把顶点 i 的标号修改为 $\varphi(i)(i = 1,2,\cdots,n)$ 后，C_n 的边集仍保持不变．可见 φ 可通过例 10.1.1 中的平面旋转和例 10.1.2 中的空间翻转两种运动得到．于是 $\Gamma(C_n) = D_n$． □

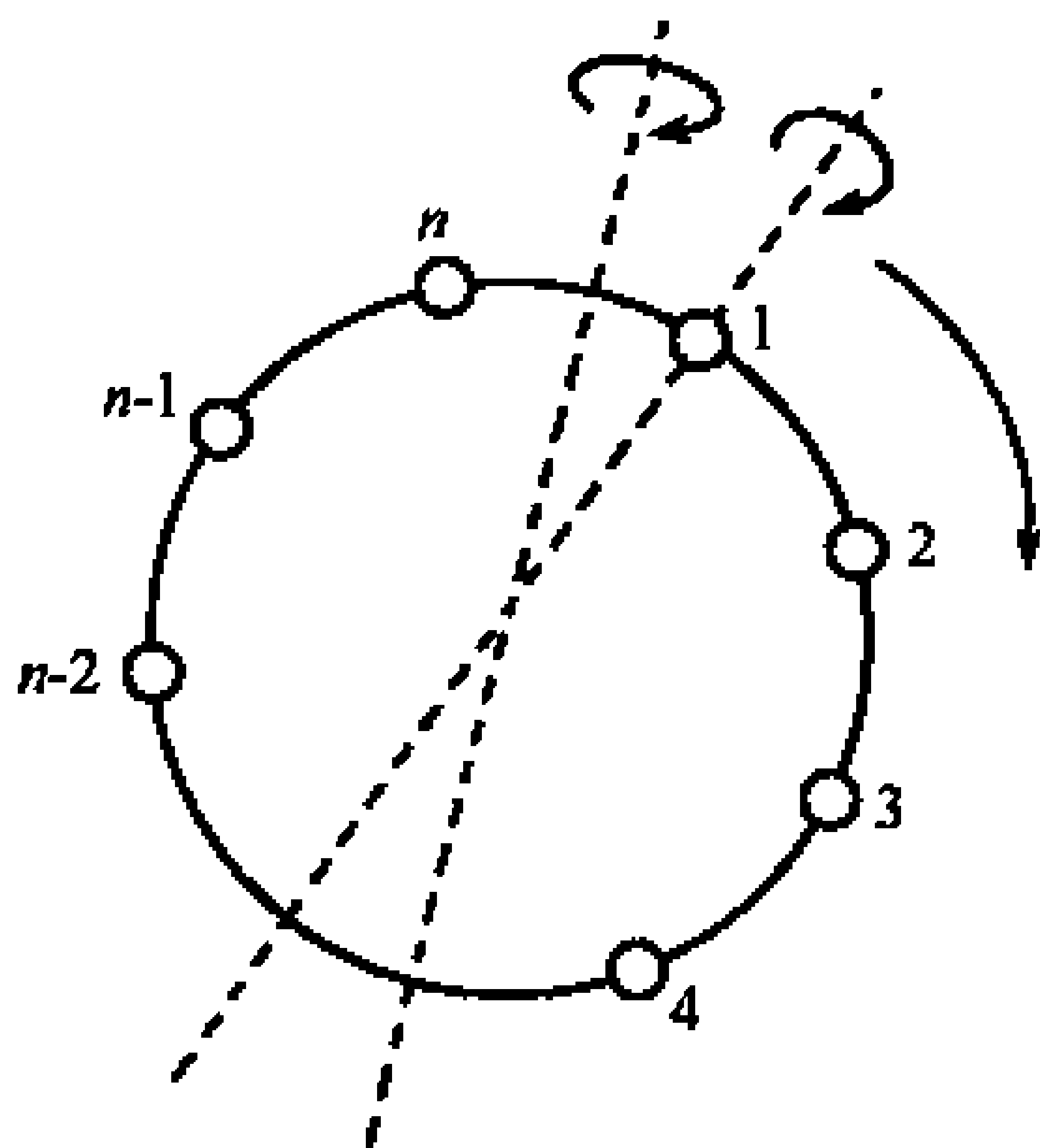


图 10.1.4 n 圈 C_n 的自同构群

设 $A = \{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，$|A| = n$，若 A 上的置换 φ 可表为

$$\varphi = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{k-1} & a_k & a_{k+1} & \cdots & a_n \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_k & a_1 & a_{k+1} & \cdots & a_n \end{pmatrix},$$

则称 φ 是一个长为 k 的轮换，简称为 k 轮换(k-cycle)，记作 $\varphi = (a_1a_2\cdots a_k)$，$(a_1a_2\cdots a_k)$ 称为 φ 的轮换表示式．显然，$(a_1a_2\cdots a_k)$ 和 $(a_ka_1a_2\cdots a_{k-1})$ 表示的是同一个轮换．任何置换都可以表示成不相交的轮换之积，且这种表示方法除了诸轮换的次序外是惟一的．例如，置换

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 6 & 4 & 8 & 7 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1258)(367)(4),$$

φ 写成 1 个长为 1、1 个长为 3、1 个长为 4 的轮换之积，我们称它为 $1^1 3^1 4^1$ 型的置换．一般地，若 φ 有 b_i 个长为 i 的轮换因子$(1 \leqslant i \leqslant n)$，则称 φ 是 $1^{b_1}2^{b_2}\cdots n^{b_n}$ 型

的置换,对于 $b_i=0$ 的那些因子(此即长为 i 的因子不存在),则不必写出.称 $(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 为置换 φ 的轮换型号(cycle type).由定义易知 $b_1+2b_2+\cdots+nb_n=n$,而置换 φ 的轮换分解式中的轮换个数则为 $b_1+b_2+\cdots+b_n$ 个.

定理 10.1.1　设 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$,则对称群 S_A 中具有型号 $(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 的置换个数为

$$\frac{n!}{(b_1!\cdots b_n!)(1^{b_1}2^{b_2}\cdots n^{b_n})}.$$

证明　$1^{b_1}2^{b_2}\cdots n^{b_n}$ 型置换的轮换形式为

$$\underbrace{(\times)\cdots(\times)}_{b_1\text{个}}\quad\underbrace{(\times\times)\cdots(\times\times)}_{b_2\text{个}}\quad\cdots\quad\underbrace{\overbrace{(\times\cdots\times)}^{n\text{个}}\cdots\overbrace{(\times\cdots\times)}^{n\text{个}}}_{b_n\text{个}}$$

其中 $b_1+2b_2+\cdots+nb_n=n$,把 $a_1,\cdots,a_n$ 的任一全排列依次填入该框架中,就得到了一个 $1^{b_1}2^{b_2}\cdots n^{b_n}$ 型置换,若把全部 $n!$ 个 $a_1,\cdots,a_n$ 的全排列填入该框架中,则相应地得到 $n!$ 个 $1^{b_1}2^{b_2}\cdots n^{b_n}$ 型置换.但显然,这 $n!$ 个 $1^{b_1}2^{b_2}\cdots n^{b_n}$ 型置换中有许多是重复的,即有许多表示的是同一个置换,其原因有两个:

(1) 同一长为 k 的轮换因子可以写成 k 种形式:$(a_1a_2\cdots a_k)=(a_2a_3\cdots a_ka_1)=\cdots=(a_ka_1\cdots a_{k-1})$,而它们在全排列中却是不同的全排列.长为 k 的轮换因子有 b_k 个,故应除以 $k^{b_k}(1\leqslant k\leqslant n)$;

(2) 互不相交的 b_k 个长为 k 的轮换因子可以交换次序,这种交换次序的方式共有 $b_k!$ 个,而它们在排列中也对应着不同的全排列,故应除以 $b_k!$.

综上所述,$1^{b_1}2^{b_2}\cdots n^{b_n}$ 型置换的个数为

$$\frac{n!}{(b_1!\cdots b_n!)(1^{b_1}2^{b_2}\cdots n^{b_n})}.$$

□

设置换 φ 的轮换型号为 $(b_1(\varphi),b_2(\varphi),\cdots,b_n(\varphi))$,$S$ 是 n 元集 A 上的一个置换群,称 n 个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的多项式

$$P_S(x_1,\cdots,x_n)=\frac{1}{|S|}\sum_{\varphi\in S}x_1^{b_1(\varphi)}\cdots x_n^{b_n(\varphi)}$$

为置换群 S 的轮换指标(cycle index).若记 $c_S(b_1,\cdots,b_n)$ 为 S 中型号为 $(b_1,\cdots,b_n)$ 的置换的个数,易知 $P_S(x_1,\cdots,x_n)$ 又可表示为

$$P_S(x_1,\cdots,x_n)=\frac{1}{|S|}\sum_{b_1+2b_2+\cdots+nb_n=n}c_S(b_1,\cdots,b_n)x_1^{b_1}\cdots x_n^{b_n}.$$

例 10.1.5　设 $S=\{e\}$ 仅含有单位置换,则 $e=(1)(2)\cdots(n)$ 为 1^n 型,故 $P_S(x_1,\cdots,x_n)=x_1^n$.　□

例 10.1.6　设 $S=S_n$,则由定理 10.1.1 知

$$P_{S_n}(x_1,\cdots,x_n)=\frac{1}{n!}\sum_{b_1+2b_2+\cdots+nb_n=n}\frac{n!}{(b_1!\cdots b_n!)(1^{b_1}\cdots n^{b_n})}x_1^{b_1}\cdots x_n^{b_n}.$$

□

定理 10.1.2　设 $S=\sigma_n$，则

$$P_S(x_1,\cdots,x_n)=\frac{1}{n}\sum_{d\mid n}\varphi(d)x_d^{\frac{n}{d}},$$

其中 $\varphi(m)$ 为小于 m，且与 m 互素的正整数的数目，即为 Euler 函数.

证明　$S=\sigma_n=\{\sigma,\sigma^2,\cdots,\sigma^{n-1},\sigma^n=e\}$，其中 $\sigma=(1\ 2\ 3\cdots\ n)$，故由定义知

$$\begin{aligned}P_S(x_1,\cdots,x_n)&=\frac{1}{n}\sum_{\varphi\in\sigma_n}x_1^{b_1(\varphi)}\cdots x_n^{b_n(\varphi)}\\&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_1^{b_1(\sigma^k)}\cdots x_n^{b_n(\sigma^k)}.\end{aligned}\tag{10.1.1}$$

对 $1\leqslant k\leqslant n$，分三种情形讨论.

(1) 若 k 与 n 互素，则显然 σ^k 仍然是一个 n 轮换；

(2) 若 $k\mid n$，即 n 是 k 的倍数，则 σ^k 是 k 个长为 $\frac{n}{k}$ 的轮换之积；

(3) 若 k 既不与 n 互素，也不是 n 的因子. 设 l 为 n 与 k 的最大公约数，则显然有 $l\neq 1,k$，且 $\frac{k}{l}$ 与 $\frac{n}{l}$ 互素. 由 $l\mid n$ 及(2) 知，σ^l 为 l 个长为 $\frac{n}{l}$ 的轮换之积，而对每个长为 $\frac{n}{l}$ 的轮换因子 $\bar{\sigma}$，由 $\frac{k}{l}$ 与 $\frac{n}{l}$ 互素及(1) 知，$(\bar{\sigma})^{k/l}$ 仍为一个长是 $\frac{n}{l}$ 的轮换因子，从而 $(\sigma^l)^{k/l}$ 仍为 l 个长是 $\frac{n}{l}$ 的轮换之积.

综合以上三种情况，我们有

$$b_i(\sigma^k)=\begin{cases}l, & i=n/l;\\0, & i\neq n/l.\end{cases}$$

其中 l 为 k 与 n 的最大公因子. 将 $b_i(\sigma^k)$ 代入式(10.1.1)，得

$$P_{\sigma_n}(x_1,\cdots,x_n)=\frac{1}{n}\sum_{l\mid n}r(l)(x_{n/l})^l,$$

其中 $r(l)$ 表示满足条件 $1\leqslant k\leqslant n$，且 k 与 n 的最大公因子为 l 的 k 的数目，也即为满足与 $\frac{n}{l}$ 互素的小于 $\frac{n}{l}$ 的正整数的数目，故 $r(l)=\varphi(\frac{n}{l})$，于是 $P_{\sigma_n}(x_1,\cdots,x_n)=\frac{1}{n}\sum_{l\mid n}\varphi(l)(x_l)^{n/l}$. □

定理 10.1.3　设 $S=D_n$，则有

$$P_{D_n}(x_1,\cdots,x_n)=\begin{cases}\frac{1}{2}P_{\sigma_n}(x_1,\cdots,x_n)+\frac{1}{2}x_1x_2^{\frac{n-1}{2}}, & n\text{ 为奇数};\\ \frac{1}{2}P_{\sigma_n}(x_1,\cdots,x_n)+\frac{1}{4}(x_2^{\frac{n}{2}}+x_1^2x_2^{\frac{n-2}{2}}), & n\text{ 为偶数}.\end{cases}$$

证明　$D_n=\{\sigma,\sigma^2,\cdots,\sigma^n,\tau,\tau\sigma,\cdots,\tau\sigma^{n-1}\}$，其中 $\sigma=(1\ 2\ \cdots\ n)$，$\tau=(1\ n)(2n-1)\cdots$，记 $\tau_n=\{\tau,\tau\sigma,\cdots,\tau\sigma^{n-1}\}$，则有

$$\begin{aligned}P_{D_n}(x_1,\cdots,x_n)&=\frac{1}{|D_n|}\Big(\sum_{\varphi\in\sigma_n}x_1^{b_1(\varphi)}\cdots x_n^{b_n(\varphi)}+\sum_{\varphi\in\tau_n}x_1^{b_1(\varphi)}\cdots x_n^{b_n(\varphi)}\Big)\\&=\frac{1}{2}P_{\sigma_n}(x_1,\cdots,x_n)+\frac{1}{2n}\sum_{\varphi\in\tau_n}x_1^{b_1(\varphi)}\cdots x_n^{b_n(\varphi)}.\end{aligned}\tag{10.1.2}$$

对任意 $\varphi\in\tau_n$，不妨设 $\varphi=\tau\sigma^i(0\leqslant i\leqslant n-1)$，则

$$\begin{aligned}\sigma^i(j)&=\quad i+j(\text{mod } n),\\ \varphi(j)&=\quad \tau\sigma^i(j)=(i-j)(\text{mod } n).\end{aligned}$$

于是 $\varphi^2(j)=i-(i-j)=j(\text{mod } n)$，即 φ^2 为单位置换，故 φ 的轮换分解式是若干个1轮换与若干个2轮换的乘积．设其中的1轮换个数为 b_i，则2轮换的个数为$\frac{1}{2}(n-b_i)$，于是式(10.1.2)中右端第二项可表示为

$$\frac{1}{2n}\sum_{\varphi\in\tau_n}x_1^{b_1(\varphi)}\cdots x_n^{b_n(\varphi)}=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}x_1^{b_i}x_2^{\frac{1}{2}(n-b_i)}.\tag{10.1.3}$$

又 b_i 是置换$\varphi=\tau\sigma^i(0\leqslant i\leqslant n-1)$的1轮换的个数，即它是如下方程的解 $j(0\leqslant j\leqslant n)$ 的个数

$$\varphi(j)=i-j=j(\text{mod } n),$$

亦即关于 j 的方程解的个数

$$2j=i(\text{mod } n).\tag{10.1.4}$$

当 n 为奇数时，2与 n 互素，故对任意 $i(0\leqslant i\leqslant n-1)$，方程(10.1.4)有惟一解，此时 $b_0=b_1=\cdots=b_{n-1}=1$，代入式(10.1.3)得

$$\frac{1}{2n}\sum_{\varphi\in\tau_n}x_1^{b_1(\varphi)}\cdots x_n^{b_n(\varphi)}=\frac{1}{2n}\sum_{i=0}^{n-1}x_1x_2^{\frac{1}{2}(n-1)}.$$

当 n 为偶数时，则方程(10.1.4)在 i 为奇数时无解，当 i 为偶数时有两个解：$j=\frac{i}{2}$ 和 $j=\frac{i}{2}+\frac{n}{2}$，故此时有

$$b_i=\begin{cases}0, & i\text{ 为奇数};\\ 2, & i\text{ 为偶数}.\end{cases}$$

代入式(10.1.3)，此时

$$\frac{1}{2n}\sum_{\varphi\in\tau_n}x_1^{b_1(\varphi)}\cdots x_n^{b_n(\varphi)}=\frac{1}{2n}\sum_{i=0}^{n-1}x_1^{b_i}x_2^{\frac{1}{2}(n-b_i)}$$

$$=\frac{1}{2n}\left(\frac{n}{2}\cdot x_1^2\cdot x_2^{\frac{1}{2}(n-2)}+\frac{n}{2}x_2^{\frac{n}{2}}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(x_1^2x_2^{\frac{1}{2}(n-2)}+x_2^{\frac{n}{2}}\right).$$

综上所述结论得证. □

例 10.1.7 在空间中取定一立方体，其顶点标号分别为 1,2,…,8，如图 10.1.5 所示，称为定体. 再设想另一个与之完全重合且顶点标号完全相同的立方体，称之为动体. 现使动体围绕其中心运动，并最终仍与定体重合，则每一种运动完全确定了顶点集上的一个置换 φ：若动体上的顶点 i 经运动后与定体上的顶点 j 重合，则令 $\varphi(i)=j$. 求立方体的空间旋转在其顶点集上产生的置换群及其轮换指标.

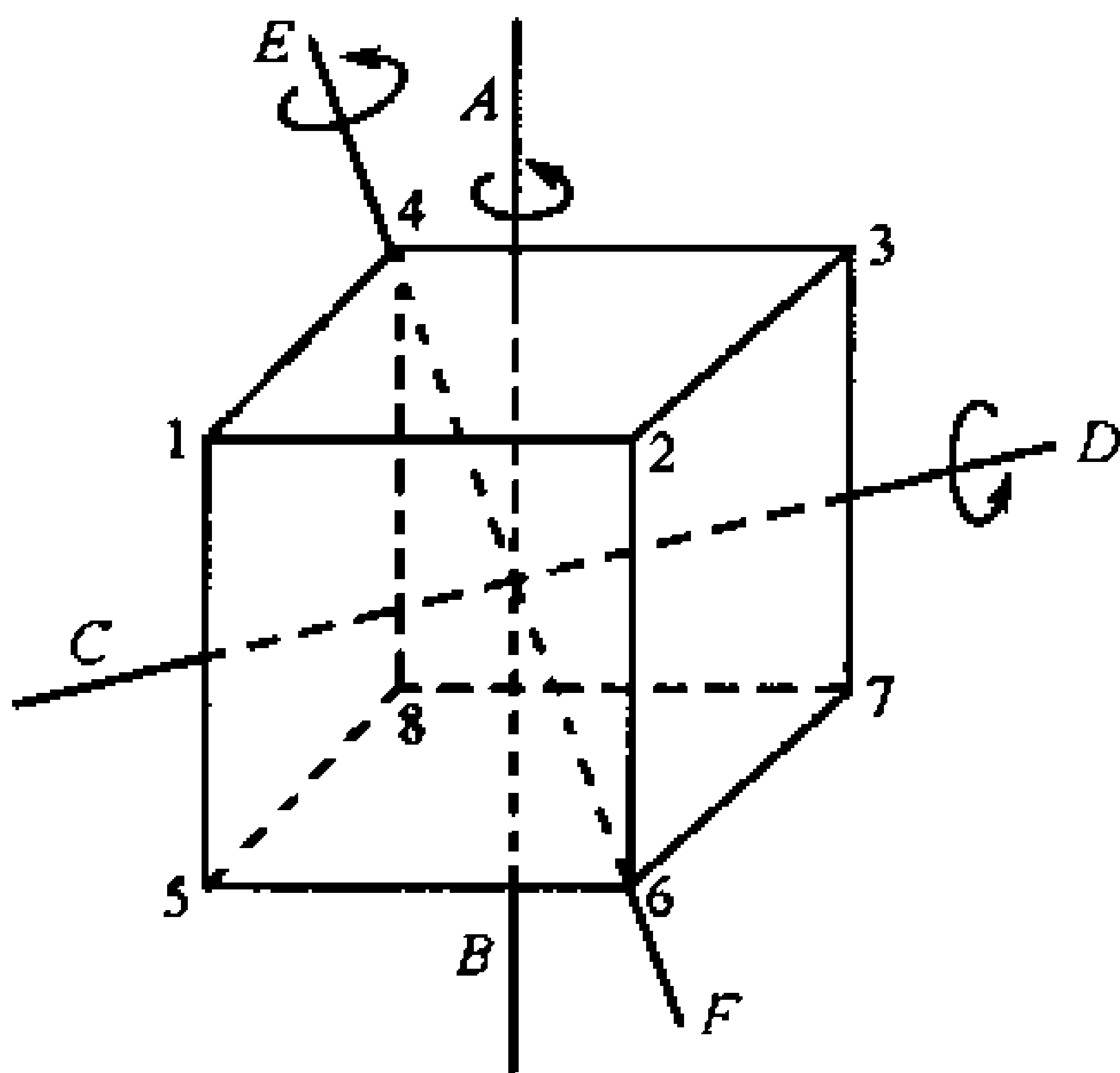


图 10.1.5 立方体的旋转在其顶点集上产生的置换群

解 使动体与定体重合的运动有以下四种.

(1) 静止不动. 确定的置换就是顶点集 S_8 上的单位置换 e.

(2) 以相对二面的中心连线为轴的旋转，立方体共有 3 个这样的对称轴. 且对每一个轴，立方体可以转 90°, 180°, 270°，共有 9 个旋转. 如图 10.1.5 中，以上下两面中心连线 AB 为轴旋转 90°, 180°, 270° 确定的置换分别是(1 2 3 4)(5 6 7 8), (1 3)(2 4)(5 7)(6 8), (1 4 3 2)(5 8 7 6)，于是，9 个旋转共确定了 6 个 4^2 型置换和 3 个 2^4 型置换.

(3) 以相对二棱的中点连线为轴的旋转，有 6 个这样的对称轴. 对每一个轴立方体应旋转 180°. 如图 10.1.5 中，以 CD 轴旋转 180° 确定的置换是(1 5)(3 7)(2

8)(4 6)，于是，6 个旋转共确定了 6 个 2^4 型置换.

(4) 以相对二顶点的连线为轴的旋转，有 4 个这样的对称轴. 对每一个轴立方体应旋转 120° 或 240°. 如图 10.1.5 中，以 EF 为轴旋转 120°，240° 确定的置换分别是(1 3 8)(2 7 5)，(1 8 3)(2 5 7)，于是，8 个旋转共确定了 8 个 $1^2 3^2$ 型置换.

综上所述，立方体的空间旋转共确定了 $1+9+6+8=24$ 个置换，这 24 个置换确实构成了一个置换群，称之为立方体的旋转群，记作 $S_{顶}$. 其轮换指标为

$$P_{S_{顶}}(x_1,x_2,\cdots,x_8) = \frac{1}{24}(x_1^8 + 6x_4^2 + 3x_2^4 + 6x_2^4 + 8x_1^2x_3^2)$$

$$= \frac{1}{24}(x_1^8 + 9x_2^4 + 6x_4^2 + 8x_1^2x_3^2). \qquad \square$$

例 10.1.8　例 10.1.7 中立方体的 24 个空间旋转也确定了在其 6 个面的集合上的 24 个置换，它们也构成群，求该置换群及其轮换指标.

解　用上、下、前、后、左、右来标记立方体的 6 个面，如图 10.1.6 所示. 下面求立方体的旋转在面集上确定的置换.

(1) 静止不动. 确定的置换是面集上的单位置换 e.

(2) 以相对二面的中心连线为轴的旋转，共有 9 个这样的旋转. 如图 10.1.6 中，以上下两面中心连线 AB 为轴旋转 90°，180°，270° 确定的置换分别是(左前右后)、(左右)(前后)、(左后右前)，于是，9 个旋转共确定了 6 个 $1^2 4^1$ 型置换和 3 个 $1^2 2^2$ 型置换.

(3) 以相对二棱的中点连线为轴的旋转，共 6 个这样的旋转. 如图 10.1.6 中，以 CD 轴旋转 180° 确定的置换是(上下)(前左)(右后)，于是，6 个旋转共确定了 6 个 2^3 型置换.

(4) 以相对二顶点的连线为轴的旋转，共 8 个这样的旋转. 如图 10.1.6 中，以 EF 为轴旋转 120°，240° 确定的置换分别是(上后左)(前右下)、(上左后)(前下右)，于是，8 个旋转共确定了 8 个 3^2 型置换.

记 $S_{面}$ 为上述 24 个旋转在面集上产生的置换群，则其轮换指标为

$$P_{S_{面}}(x_1,x_2,\cdots,x_6) = \frac{1}{24}(x_1^6 + 6x_1^2x_4 + 3x_1^2x_2^2 + 6x_2^3 + 8x_3^2).$$

$\square$

同样，立方体的空间旋转在其棱集上也产生一个置换群 $S_{棱}$，用类似的方法可求得其轮换指标为

$$P_{S_{棱}}(x_1,x_2,\cdots,x_{12}) = \frac{1}{24}(x_1^{12} + 6x_4^3 + 3x_2^6 + 6x_1^2x_2^5 + 8x_3^4).$$

轮换指标是本章一个很重要的概念，Pólya 计数定理就是通过置换群的轮换指标给出的.

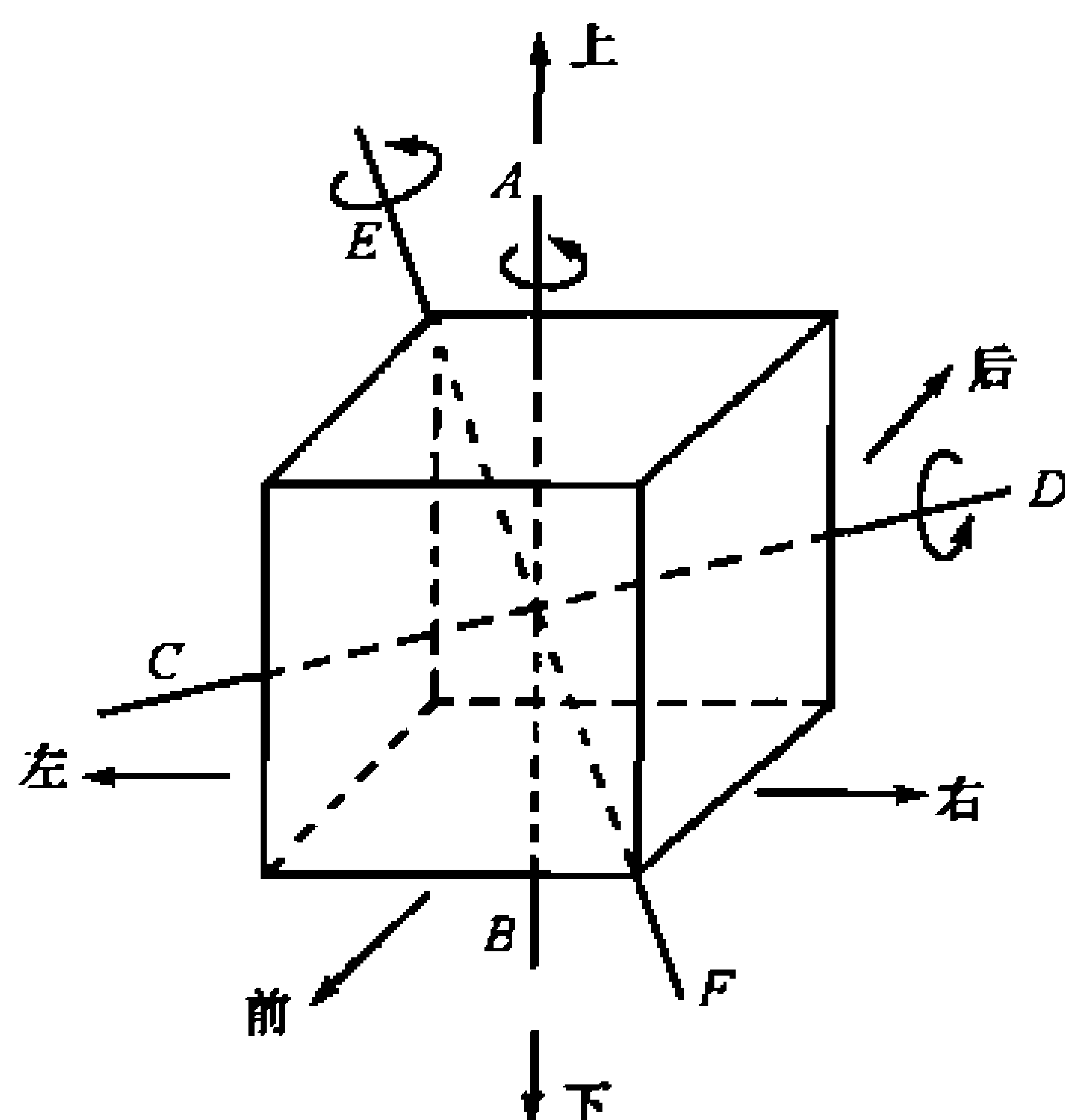


图 10.1.6　立方体的旋转在其面集上产生的置换群

10.2　同构图的计数

有了群论的基本知识后，我们介绍如何计算与给定图 G 同构的图的数目，即考虑给一个无标号图 G 的顶点标号，可以得到多少个不同的标号图．先看如图 10.2.1 所示的 16 个 4 阶标号树，其中 12 个图与链 P_4 同构，4 个与 $K_{1,3}$ 同构，容易知道 $|\Gamma(P_4)|=2$，$|\Gamma(K_{1,3})|=6$．因为这里是 4 阶树，故有 $12=4!/2=4!/|\Gamma(P_4)|$ 和 $4=4!/|\Gamma(P_{1,3})|$，由此可见，与图 G 同构的图的数目似乎与 G 的自同构群 $\Gamma(G)$ 的阶数有关．

设 $\mathscr{G}$ 为全体 n 阶标号图构成的集合．设其顶点集为 $V=\{1,2,\cdots,n\}$，S_n 是 V 上的对称群，对任意的 $G\in\mathscr{G}$，$\varphi\in S_n$，用置换 φ 作用在图 G 的顶点集上．而保持 G 的边不动，这样，置换 φ 就把 G 变成了另外一个图 $G'\in\mathscr{G}$，即 $V(G')=V$，而 $E(G')=\{(\varphi(i),\varphi(j))\mid(i,j)\in E(G),\forall i,j\in V\}$．显然，这样得到的 G' 与 G 同构．

例如对图 10.2.2 中 $G=P_4$，取 $\varphi=\sigma=(1\ 2\ 3\ 4)$，则在 φ 作用下 G 变成了 G'，显然 $G'\neq G$，但它们是同构的．

对称群 S_n 是作用在顶点集 V 上的，现在，我们定义群 S_n 对集合 $\mathscr{G}$ 的作用．对任意 $G\in\mathscr{G}$，$\varphi\in S_n$，定义 $\varphi G=G'$（G' 定义如前所述），它满足如下两个条件

(1) $eG=G$（e 为单位置换）；

图 10.2.1　全体 4 阶标号树

图 10.2.2　置换 $\varphi = (1\ 2\ 3\ 4)$ 对 G 的作用

(2) $(\varphi_1\varphi_2)G = \varphi_1(\varphi_2 G)\ \forall \varphi_1, \varphi_2 \in S_n, G \in \mathscr{G}$.

一般地，设 S 和 X 分别为有限群和有限集，若对任意的 $\varphi \in S$ 和 $x \in X$，有 X 中的一个元素与之对应，记作 φx，且此对应关系满足：

(1) $ex = x, \forall x \in X$，e 为 S 的单位元；

(2) $(\varphi\varphi')x = \varphi(\varphi' x), \forall \varphi, \varphi' \in S, x \in X$.

则称群 S 作用在集合 X 上，记作 (S, X)，又称 X 为群 S 作用下的目标集.

若 S 本身就是 X 上的置换群，则定义 $\varphi x = \varphi(x)$，于是，置换群是一种特殊的群对集合作用，图集 $\mathscr{G}$ 作为对称群 S_n 作用下的目标集，也是一种群对集合的

作用，记作$(S_n,\mathscr{G})$.

在群作用(S,X)下，X中元素x和y称为是"S等价"的，记作$x\overset{S}{\sim}y$，如果存在$\varphi\in S$，使$y=\varphi x$. 显然这种"S等价"关系也是X上的一个等价关系. 集合X在S等价关系之下的等价类称为是群作用(S,X)的轨道(orbit)，简称S轨道. 轨道中元素的个数称为轨道的长度. 元素x所在的S轨道记作$\theta(x)$，即$\theta(x)=\{y\mid\exists\varphi\in S,\varphi x=y\}$. 对任意$x\in X$，令$S_x=\{\varphi\in S\mid\varphi x=x\}$，即$S_x$为$S$中使$x$保持不动的元素之集合. 易知$S_x$为$S$的子群，称之为$x$的稳定子群(stabilizer).

对群作用$(S_n,\mathscr{G})$，设$G\in\mathscr{G}$，则$\theta(G)=\{G'\mid\exists\varphi\in S_n$，使$\varphi G=G'\}$，即为$\mathscr{G}$中与$G$同构的图的集合，而$S_G=\{\varphi\in S_n\mid\varphi G=G\}$. 由例10.1.3知$S_G=\Gamma(G)$，即$G$的稳定子群$S_G$就是$G$的自同构群.

下面我们来证明$|\theta(G)|=\dfrac{n!}{|\Gamma(G)|}$.

定理 10.2.1 设(S,X)为一个群作用，则有

$$|S|=|\theta(x)|\cdot|S_x|,\forall x\in X.$$

证明 $\forall x\in X$，设$\theta(x)=\{x_1,x_2,\cdots,x_l\}$，$|\theta(x)|=l$. 由$\theta(x)$的定义知，对任意$x_i\in\theta(x)$，必存在相应的$\varphi_i\in S$使得$\varphi_i(x)=x_i(\forall i\in\{1,2,\cdots,l\})$.

令$\varphi_iS_x=\{\varphi_i\varphi\mid\varphi\in S_x\}\subseteq S(\forall i\in\{1,2,\cdots,l\})$，易证$\varphi_iS_x$满足如下三条：

(1) $|\varphi_iS_x|=|S_x|(\varphi,\varphi'\in S_x,\varphi\neq\varphi'\Rightarrow\varphi_i\varphi\neq\varphi_i\varphi')$;

(2) $\varphi_iS_x\cap\varphi_jS_x=\varnothing(\forall i\neq j)$;

(3) $\varphi_1S_x\cup\varphi_2S_x\cup\cdots\cup\varphi_lS_x\subseteq S$.

接下来，我们证明$S\subseteq\varphi_1S_x\cup\varphi_2S_x\cup\cdots\cup\varphi_lS_x$.

$\forall\varphi\in S$，设$\varphi x=y\in X$，y与x等价，$y\in\theta(x)$，不妨设$y=x_i$，由于

$$(\varphi_i^{-1}\varphi)x=\varphi_i^{-1}y=\varphi_i^{-1}x_i=x,$$

所以$\varphi_i^{-1}\varphi\in S_x$，进而$\varphi\in\varphi_iS_x$. 由$\varphi$的任意性，即证$S\subseteq\varphi_1S_x\cup\varphi_2S_x\cup\cdots\cup\varphi_lS_x$.

综上所述，$S=\varphi_1S_x\cup\varphi_2S_x\cup\cdots\cup\varphi_lS_x$，从而有

$$\begin{aligned}|S|&=|\varphi_1S_x|+|\varphi_2S_x|+\cdots+|\varphi_lS_x|\\&=|S_x|+|S_x|+\cdots+|S_x|\\&=|\theta(x)|\cdot|S_x|.\end{aligned}$$

□

推论 10.2.2 设G为n阶图，则与G同构的图有$\dfrac{n!}{|\Gamma(G)|}$个. □

推论 10.2.3　顶点标号的 n 阶完全图 K_n 中不同的 Hamilton 圈有 $\frac{1}{2}(n-1)!$ 个.

证明　若去掉顶点标号,则 K_n 中的 Hamilton 圈 C_n 只有 1 个. 于是,顶点标号的 K_n 中不同的 Hamilton 圈的个数即为与 C_n 同构的图的个数. 由例 10.1.4 知 $\Gamma(C_n)=D_n$,从而与 C_n 同构的图有 $\frac{n!}{|\Gamma(C_n)|}=\frac{n!}{2n}=\frac{1}{2}(n-1)!$ 个. □

例 10.2.1　求与 $K_{1,n}$ 同构的图的个数.

解　易知 $\Gamma(K_{1,n})=S_n$, $K_{1,n}$ 如图 10.2.3 所示,于是与 $K_{1,n}$ 同构的图的个数为: $\frac{(n+1)!}{|S_n|}=\frac{(n+1)!}{n!}=n+1$, 即 $|\theta(K_{1,n})|=n+1$. 当 $n=3$ 时, $|\theta(K_{1,3})|=4$. □

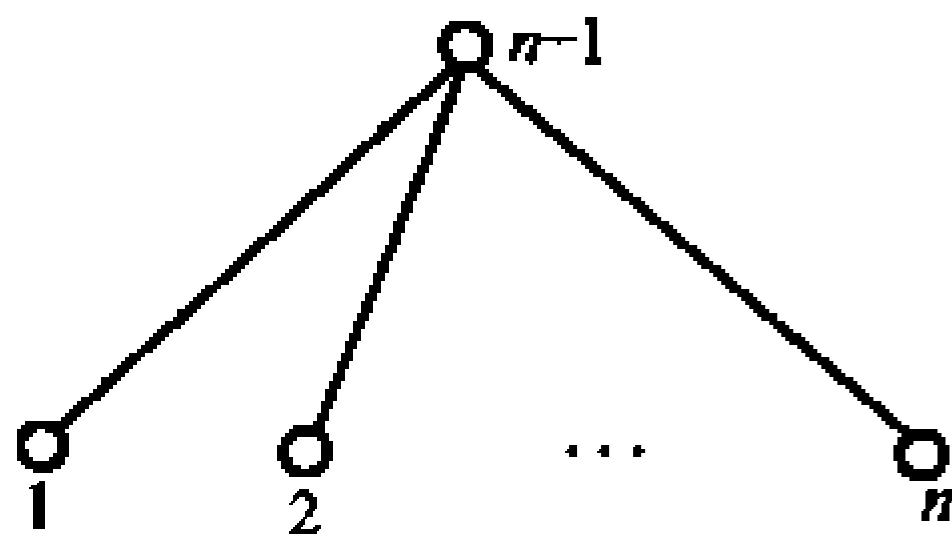


图 10.2.3　$K_{1,n}$

由定理 10.2.1 知,若 x 与 y 位于同一个 (S,X) 轨道,则它们的稳定子群必有相同的阶数,且 $|S_x|=|S_y|=\frac{|S|}{|\theta(x)|}=\frac{|S|}{|\theta(y)|}$,因此,有如下著名的 Burnside 引理.

定理 10.2.4　设 (S,X) 为一个群作用,则 S 等价类的个数为

$$N=\frac{1}{|S|}\sum_{\varphi\in S}c_1(\varphi),$$

其中 $c_1(\varphi)$ 为在 φ 作用下保持不变的元素的个数.

证明　设全体 S 等价类为 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_N$,则有 $X=\theta_1\cup\theta_2\cup\cdots\cup\theta_N$ 及 $\theta_i\cap\theta_j=\varnothing(i\neq j)$,由定理 10.2.1 知 $\sum_{x\in\theta_i}|S_x|=\sum_{x\in\theta_i}\frac{|S|}{|\theta_i|}=|S|$,于是

$$\sum_{x\in X}|S_x|=\sum_{i=1}^{N}\Big(\sum_{x\in\theta_i}|S_x|\Big)=N\cdot|S|,$$

从而

$$N=\frac{1}{|S|}\sum_{x\in X}|S_x|=\frac{1}{|S|}\sum_{x\in X}\sum_{\varphi\in S_x}1$$

$$= \frac{1}{|S|}\sum_{\substack{x\in X\\ \varphi\in S\\ \varphi x=x}}1 = \frac{1}{|S|}\sum_{\varphi\in S}\sum_{\substack{x\in X\\ \varphi x=x}}1$$

$$= \frac{1}{|S|}\sum_{\varphi\in S}c_1(\varphi).$$ □

设 ω 是定义在X上的一个数值函数,称为权.若 ω 在X的各个S等价类上都取相同数值,则可自然地定义 ω 在轨道θ_i上的值为其在θ_i中任一元素x上的值,即 $\omega(\theta_i)=\omega(x)(\forall x\in\theta_i)$.此时各轨道上的权之和 $\sum_{i=1}^{N}\omega(\theta_i)$ 可由定理10.2.5给出,定理10.2.5又称为"带权形式的Burnside引理".

定理10.2.5 设 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_N$ 为X上的全部S等价类,ω 是X上的权函数,它在各轨道上取常数,则

$$\sum_{i=1}^{N}\omega(\theta_i) = \frac{1}{|S|}\sum_{\varphi\in S}\sum_{x=\varphi x}\omega(x).$$

证明

$$\sum_{i=1}^{N}\omega(\theta_i) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{x\in\theta_i}\frac{\omega(x)}{|\theta_i|} = \sum_{x\in X}\frac{\omega(x)}{|\theta(x)|}$$

$$= \frac{1}{|S|}\sum_{x\in X}|S_x|\cdot\omega(x) = \frac{1}{|S|}\sum_{x\in X}\omega(x)(\sum_{\varphi\in S_x}1)$$

$$= \frac{1}{|S|}\cdot\sum_{\substack{x\in X\\ \varphi\in S\\ \varphi x=x}}\omega(x) = \frac{1}{|S|}\sum_{\varphi\in S}\sum_{x=\varphi x}\omega(x).$$ □

10.3 Pólya计数定理

在群作用$(S_n,\mathscr{G})$下,由Burnside引理知$\mathscr{G}$上的S_n等价类个数为

$$N = \frac{1}{|S_n|}\sum_{\varphi\in S_n}c_1(\varphi) = \frac{1}{n!}\sum_{\varphi\in S_n}c_1(\varphi).$$

此N即为全体n阶简单图(无标号)的数目,因此从理论上来讲,由Burnside引理即可求出此N,但在实际操作上却是不可行的,因为对任意的n,我们要计算的是$n!$个置换φ所对应的$c_1(\varphi)$,工作量之大是可想而知的,例如当$n=8$时,要计算的$c_1(\varphi)$竟达到4万多(40320个),而且求每个$c_1(\varphi)$也非易事.正因为如此,Burnside引理自1911年提出来以后并没有得到广泛的应用,1937年,Pólya对此引理作了重大改进,形成Pólya计数定理.Pólya计数定理则成为了组合数学中一个十分有力的计数工具.许多计数问题最终都可以归纳为求在群作用下的轨

道的数目，这些轨道还常常可以指定有一个权，Pólya 给出了按照它们的权来计数轨道个数的方法.

设 D 和 R 都为有限集，D 为定义域，R 为值域，记 $R^D = \{f \mid f: D \to R\}$ 为由 D 到 R 的全体映射构成的集合，R^D 中有 $|R|^{|D|}$ 个映射.

设 S 是有限集 D 上的置换群，对任意的 $f \in R^D$ 及 $\varphi \in S$，由 f 与 φ 确定了一个从 D 到 R 的映射 f'，对任意 $d \in D$，有

$$f'(d) = f(\varphi(d)).$$

若定义置换群 S 对集合 R^D 的作用为

$$\varphi f = f', \ \forall f \in R^D, \quad \varphi \in S,$$

则显然有,

(1) $ef = f \quad ef(d) = f(e(d)) = f(d), \forall d \in D$;

(2) $(\varphi\varphi')f = \varphi(\varphi' f), \forall \varphi, \varphi' \in S, f \in R^D$.

证明(2)　$(\varphi\varphi')f(d) = f((\varphi\varphi')d) = f(\varphi(\varphi' d))$

$$= \varphi(f(\varphi' d)) = \varphi(\varphi' f(d)).$$ □

因此，群 S 作用在集合 R^D 上，记作 (S, R^D). 集合 R^D 中的映射在群 S 作用下被分成了各个不同的 S 等价类，通常我们把处于同一 S 等价类中的映射看成是相同的.

例如要构造一个有 4 颗珠子串成的项链，珠子有红颜色和蓝颜色两种，问共有多少种不同的项链. 当然，两个串好的项链，如果经过翻转后一模一样，则它们就是相同的了. 如果把第 1 颗珠子和第 3 颗珠子串成红颜色的，而第 2 颗珠子和第 4 颗珠子串成蓝色的项链，与把第 1 颗珠子和第 3 颗珠子串成蓝色，而把第 2 颗珠子和第 4 颗珠子串成红色的项链就是相同的. 由此可见，不同的构造方法，却可能得到相同的项链. 我们设定义域 D 为放珠子的 4 个位置集，而 $R = \{$红色珠子，蓝色珠子$\}$ 为值域，对任意的 $f \in R^D$，f 对应了一种构造项链的方法，即对每个位置都指定了一种颜色的珠子. 此时，D 上的置换群应为二面体群 D_4，相应的群作用为 (D_4, R^D)，R^D 上的全部 D_4 等价类的个数即为不同项链的数目.

在 R 上定义一个权函数 ω，并且对每一个 $f \in R^D$ 也相应地指定一个权 $W(f)$，它的定义如下

$$W(f) = \prod_{d \in D} \omega(f(d)). \tag{10.3.1}$$

若 f_1 与 f_2 是 S 等价的，即存在 $\varphi \in S$，使 $f_2 = \varphi f_1$，则有

$$\begin{aligned} W(f_2) &= \prod_{d \in D} \omega(f_2(d)) = \prod_{d \in D} \omega(\varphi f_1(d)) \\ &= \prod_{d \in D} \omega(f_1(\varphi(d))) = \prod_{d \in D} \omega(f_1(d)) = W(f_1), \end{aligned}$$

可见处于同一个(S,R^D)轨道中的映射具有相同的权，所以每一轨道的权可以定义为其中任何一个映射的权.

定理 10.3.1(Pólya, 1937)　设$\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_N$为$R^D$上全部$S$等价类，$\omega$是$R$上的权函数，$W$为$R^D$上的由式(10.3.1)所定义的权函数，则有

$$\sum_{i=1}^{N} W(\theta_i) = P_S\left(\sum_{r\in R}\omega(r), \sum_{r\in R}\omega^2(r), \cdots, \sum_{r\in R}\omega^n(r)\right),$$

其中$P_S(x_1,x_2,\cdots,x_n)$为置换群S在D上的轮换指标.

证明　由带权形式的 Burnside 引理(即定理 10.2.5)知

$$\sum_{i=1}^{N} W(\theta_i) = \frac{1}{|S|}\sum_{\varphi\in S}\sum_{f=\varphi f} W(f). \tag{10.3.2}$$

任取S中一置换φ，若$f\in R^D$，使$f=\varphi f$，则$f=\varphi f=\varphi^2 f=\cdots$，对$\varphi$的任一轮换因子$(d_1d_2\cdots d_k)$有

$$\begin{aligned} f(d_1) = f(\varphi(d_1)) &= f(d_2) \\ &= f(\varphi(d_2)) = f(d_3) \\ &= \cdots = f(d_k), \end{aligned}$$

此即f在φ的每个轮换因子所含的元素上取相同的值.设φ为$1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\cdots n^{\lambda_n}$型置换，则易见

$$\sum_{\substack{f=\varphi f\\ f\in R^D}} W(f) = \left(\sum_{r\in R}\omega(r)\right)^{\lambda_1}\left(\sum_{r\in R}\omega^2(r)\right)^{\lambda_2}\cdots\left(\sum_{r\in R}\omega^n(r)\right)^{\lambda_n}. \tag{10.3.3}$$

由轮换指标定义$P_S(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\dfrac{1}{|S|}\sum\limits_{\varphi\in S}x_1^{b_1(\varphi)}\cdots x_n^{b_n(\varphi)}$，及式(10.3.2)和式(10.3.3)得

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N} W(\theta_i) &= \frac{1}{|S|}\sum_{\varphi\in S}\sum_{f=\varphi f} W(f) \\ &= \frac{1}{|S|}\sum_{\varphi\in S}\left(\sum_{r\in R}\omega(r)\right)^{b_1(\varphi)}\left(\sum_{r\in R}\omega^2(r)\right)^{b_2(\varphi)}\cdots\left(\sum_{r\in R}\omega^n(r)\right)^{b_n(\varphi)} \\ &= P_S\left(\left(\sum_{r\in R}\omega(r)\right),\left(\sum_{r\in R}\omega^2(r)\right),\cdots,\left(\sum_{r\in R}\omega^n(r)\right)\right). \end{aligned}$$ □

推论 10.3.2　设S为D上置换群，$\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_N$为群作用$(S,R^D)$上的全部轨道，则

$$N = P_S(|R|, |R|, \cdots, |R|).$$

证明　对任意$r\in R$，定义权$\omega(r)=1$，则

$$W(f) = \prod_{d\in D}\omega(f(d)) = 1, \qquad \forall f\in R^D.$$

于是$W(\theta_i)=1$，$i=1,2,\cdots,N$.由 Pólya 定理有

$$N = \sum_{i=1}^{N} W(\theta_i)$$
$$= P_S\left(\sum_{r\in R}\omega(r), \sum_{r\in R}\omega^2(r), \cdots, \sum_{r\in R}\omega^n(r)\right)$$
$$= P_S(|R|, |R|, \cdots, |R|).$$
□

推论 10.3.2 给出了群作用(S, R^D)上的等价类的个数，例如对前面提到的用红、蓝两色珠子构造有 4 颗珠子的项链，则不同项链的数目为

$$P_{D_4}(|R|, |R|, |R|, |R|).$$

又
$$P_{D_4}(x_1,x_2,x_3,x_4) = \frac{1}{2}P_{\sigma_4}(x_1,x_2,x_3,x_4) + \frac{1}{4}(x_2^2 + x_1^2x_2)$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\sum_{d|4}\varphi(d)x_d^{\frac{4}{d}} + \frac{1}{4}(x_2^2 + x_1^2x_2)$$
$$= \frac{1}{8}(x_1^4 + 2x_1^2x_2 + 3x_2^2 + 2x_4).$$

从而

$$N = P_{D_4}(|R|, |R|, |R|, |R|) = P_{D_4}(2,2,2,2)$$
$$= \frac{1}{8}(2^4 + 2^4 + 3\cdot 2^2 + 2^2) = 6.$$

即用红、蓝两色珠子串成的有4颗珠子的项链共有6个，如图10.3.1所示．若用三种颜色的珠子串成有4颗珠子的项链，则不同的项链数为 $P_{D_4}(3,3,3,3) = \frac{1}{8}(3^4 + 2\cdot 3^3 + 3\cdot 3^2 + 2\cdot 3) = 21$．一般地，若用 r 种颜色的珠子构造有 4 颗珠子的项链，则可以得到 $P_{D_4}(r,r,r,r) = \frac{1}{8}(r^4 + 2r^3 + 3r^2 + 2r)$ 个不同的项链．更一般地，若用 r 种颜色的珠子构造有 n 颗珠子的项链，则不同项链的个数为 $P_{D_n}(r,r,\cdots,r)$．但不能用推论 10.3.2 求规定了某种颜色珠子的个数的项链数，如用红、蓝两色珠子构造有 4 颗珠子的项链，要求其中有 2 颗珠子是红的，另外 2 颗是蓝的，这样的项链的数目无法由推论 10.3.2 求得．由图 10.3.1 易见，这样的项链有 2 个，实际上，这样的项链数可以由定理 10.3.1 求得．

例10.3.1　用红、绿、蓝三种颜色的珠子串成有6颗珠子的项链，问其中有2颗红色珠子，2 颗绿色珠子的项链有多少个？

解　设 $D = \{1,2,3,4,5,6\}$ 为项链上六个位置集合，$R = \{$红，绿，蓝$\}$ 为三种颜色的珠子的集合，此时的置换群为 D_6，于是其轮换指标为

$$P_{D_6}(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)$$
$$= \frac{1}{2}P_{\sigma_6}(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6) + \frac{1}{4}(x_2^3 + x_1^2x_2^2)$$

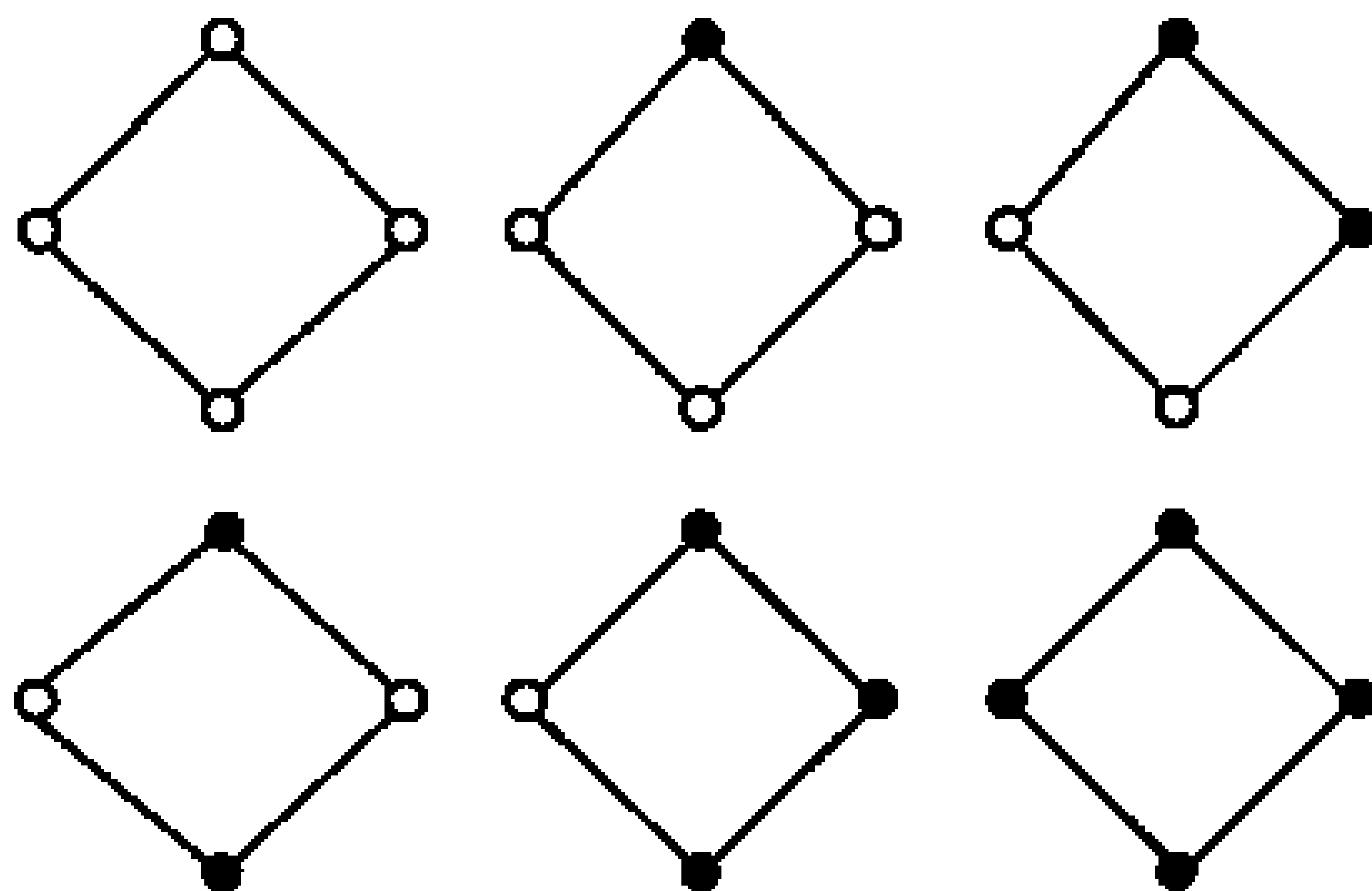


图 10.3.1 红、蓝两色珠子串成的有4颗珠子的6个项链

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \sum_{d|6} \varphi(d) x_d^{\frac{6}{d}} + \frac{1}{4}(x_2^3 + x_1^2 x_2^2)$$

$$= \frac{1}{12}(x_1^6 + 4x_2^3 + 3x_1^2 x_2^2 + 2x_3^2 + x_6).$$

给 R 中元素赋权为 $\omega(红) = x, \omega(绿) = y, \omega(蓝) = 1$. 任取 $f \in R^D$，若 f 把 D 中 n 个位置映射到红，m 个位置映射到绿，则 $W(f) = \sum_{d \in D} \omega(f(d)) = x^n y^m$，于是 f 所在的轨道的权为 $x^n y^m$，从而求有 n 个红珠、m 个绿珠的项链数目即为求权是 $x^n y^m$ 的轨道的个数. 由定理 10.3.1 知

$$\sum_{i=1}^{N} W(\theta_i) = P_{D_6}\left(\sum_{r \in R} \omega(r), \sum_{r \in R} \omega^2(r), \cdots, \sum_{r \in R} \omega^6(r) \right)$$

$$= P_{D_6}(1 + x + y, 1 + x^2 + y^2, \cdots, 1 + x^6 + y^6)$$

$$= \frac{1}{12}[(1 + x + y)^6 + 4(1 + x^2 + y^2)^3 + 3(1 + x + y)^2(1 + x^2 + y^2)^2$$

$$+ 2(1 + x^3 + y^3)^2 + (1 + x^6 + y^6)].$$

其中 $x^2 y^2$ 项的系数为

$$\frac{1}{12}\left(\binom{6}{2}\binom{4}{2} + 4 \cdot \binom{3}{1}\binom{2}{1} + 3 \cdot \left[2\binom{2}{1} + \binom{2}{1} \right] \right) = 11.$$

即有 2 颗红珠、2 颗绿珠的项链共有 11 个，这 11 个项链如图 10.3.2 所示. □

例 10.3.2 将正三角形的 3 个顶点用红、蓝、绿 3 种颜色进行染色（相邻顶点可以染相同颜色）. 问有多少种不同的方案？如果

(1) 经旋转能重合的方案认为是相同的；

(2) 经旋转和翻转后能重合的方案认为是相同的.

解 (1) 设 $D = \{1, 2, 3\}$ 为三角形 3 个顶点，$R = \{红色, 蓝色, 绿色\}$，D 上

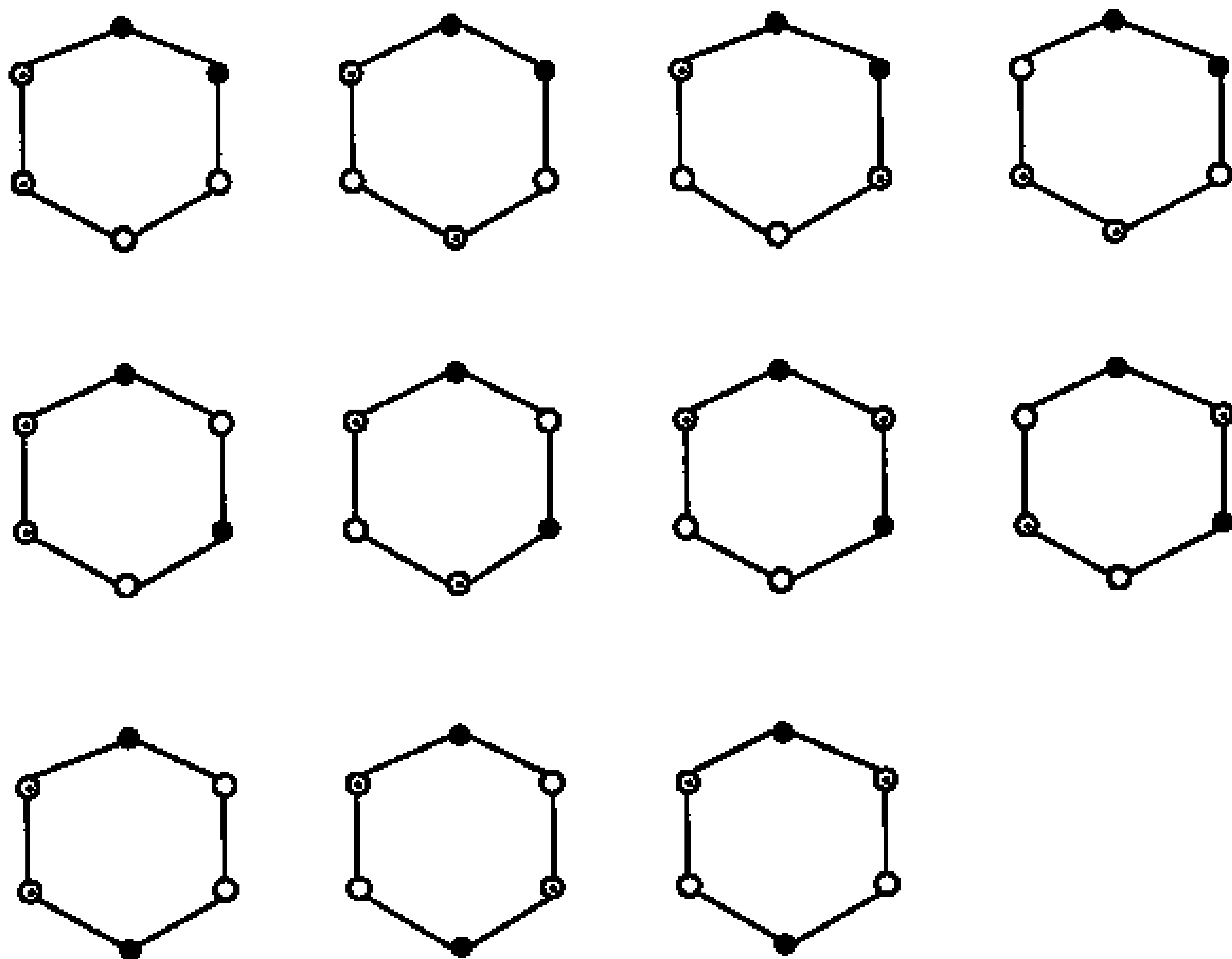


图 10.3.2　有 2 颗红珠,2 颗绿珠的项链

的置换群 S 为

$$S=\{\sigma_I,(123),(132)\},$$

转换指标 $P_S(x_1,x_2,x_3)=\frac{1}{3}(x_1^3+2x_3)$.于是不同的等价类个数为

$$P_S(3,3,3)=\frac{1}{3}(3^3+2\cdot 3)=3^2+2=11.$$

(2) D 上的置换群 S 应为

$$S=D_3=\{\sigma_I,(123),(132),(23),(13),(12)\},$$

轮换指标为 $$P_S(x_1,x_2,x_3)=\frac{1}{6}(x_1^3+3x_1x_2+2x_3).$$

此时不同等价类个数为

$$P_S(3,3,3)=\frac{1}{6}(3^3+3\cdot 3\cdot 3+2\cdot 3)$$

$$=\frac{1}{2}(3^2+3^2+2)=3^2+1=10.$$ □

例 10.3.3　用 r 种颜色给立方体的八个顶点染色,试问有多少种不同的方案?

解　由例 10.1.7 知,$P_{S_{\text{Ⅲ}}}(x_1,x_2,\cdots,x_8)=\frac{1}{24}(x_1^8+9x_2^4+6x_4^2+8x_1^2x_3^2)$.于

是不同的染色方案数 $N = P_{S_{\mathbb{W}}}(r,r,\cdots,r) = \frac{1}{24}(r^8 + 9 \cdot r^4 + 6r^2 + 8r^4) = \frac{1}{24}(r^8 + 17r^4 + 6r^2)$.

特别地，若用 2 种颜色染立方体的顶点，则不同的染色方案有 $\frac{1}{24}(2^8 + 17 \cdot 2^4 + 6 \cdot 2^2) = 23$ 种. 若用 3 种颜色染，则有 $\frac{1}{24}(3^8 + 17 \cdot 3^4 + 6 \cdot 3^2) = 333$ 种.

□

用 Pólya 定理解计数问题的关键有两个方面，首先要以明确的数学方式区分所要进行计数的对象中哪些应视为等同的，哪些应视为不同的. 也就是要在对象集合上明确定义一种置换群，使得进行计数的对象不是集合中的元素，而是元素在该置换群作用下的等价类. 然后再确定置换群的轮换指标，利用 Pólya 定理得到计数问题的解.

10.4 图的计数

这一节将介绍如何利用 Pólya 定理得到 n 阶图的计数多项式. 记 g_{nm} 为有 n 个顶点，m 条边的简单无标号图的数目，则称

$$g_n(x) = \sum_{m=0}^{\frac{1}{2}n(n-1)} g_{nm}x^m,$$

为 n 阶图的计数多项式. 求计数多项式的关键在于 g_{nm}.

如 1,2,3 阶图的计数多项式分别为

$$g_1(x) = 1,$$
$$g_2(x) = 1 + x,$$
$$g_3(x) = 1 + x + x^2 + x^3.$$

设 $V = \{1,2,\cdots,n\}$ 为顶点集，考虑用红、蓝两种颜色给 n 阶完全图 K_n 的边任意染色. 若某边被染成红色，则认为该边存在，若染成蓝色，则认为它不存在. 这样，K_n 的一种边染色就对应了一个 n 阶简单标号图. 设 $R = \{红,蓝\}$，$D = V \times V$ 为边集，则 R^D 中映射与 n 阶简单标号图一一对应. 问题的关键在于如何确定 D 上的置换群 S，使得在群作用 (S, R^D) 下，f_1 与 f_2 属于同一个 S 轨道，等价于相应的 G_1 与 G_2 同构. 设 S_n 为顶点集 V 上的对称群，定义相应的 D 上的置换群 $S_n^{(2)}$ 如下

$$S_n^{(2)} = \{\varphi' \mid \varphi'(i,j) = (\varphi(i), \varphi(j)), \varphi \in S_n, (i,j) \in D\}.$$

即对 S_n 中的每一个置换 φ，在 $S_n^{(2)}$ 中有一个相应的置换 φ'，使

$$\varphi'(i,j) = (\varphi(i),\varphi(j)),\ \forall (i,j) \in D.$$

引理 10.4.1 将说明 $S_n^{(2)}$ 即为满足要求的 D 上的置换群，我们称 $S_n^{(2)}$ 为 D 上的对群.

引理 10.4.1　设 $f_1,f_2 \in R^D$，G_1 和 G_2 分别为 f_1,f_2 定义的图，则 f_1 与 f_2 属于同一个 $S_n^{(2)}$ 轨道，等价于 G_1 与 G_2 同构.

证明　若 f_1 与 f_2 属于同一个 $S_n^{(2)}$ 轨道，则存在一个 $\varphi' \in S_n^{(2)}$，使 $f_2 = \varphi' f_1$，即

$$\begin{aligned} f_2(i,j) &= \varphi' f_1(i,j) = f_1(\varphi'(i,j)) \\ &= f_1((\varphi(i),\varphi(j)))\quad (\forall (i,j) \in D). \end{aligned}$$

于是存在 $\varphi \in S_n$，使 $(i,j) \in E(G_2)$ 等价于 $(\varphi(i),\varphi(j)) \in E(G_1)$，此即 $G_2 \cong G_1$.

同理可以证明：若 $G_2 \cong G_1$，则 f_1 与 f_2 必处于同一个 $S_n^{(2)}$ 轨道.　□

接下来，我们给 R 中元素赋权，令 $\omega(\text{红}) = x$，$\omega(\text{蓝}) = 1$，则对任意 $f \in R^D$，若 f 把 D 中的 m 条边映射到红，相应地，f 的权 $W(f) = \prod_{d\in D}\omega(f(d)) = x^m$. 于是，$f$ 所在的 $S_n^{(2)}$ 轨道的权亦为 x^m. 反之，权为 x^m 的轨道的个数即为有 m 条边的 n 阶简单图无标号图的个数. 这样，我们就可以利用 Pólya 计数定理求出 n 阶图的计数多项式.

定理 10.4.2　设 $S_n^{(2)}$ 为 D 上的对群，则 n 阶图的计数多项式为

$$g_n(x) = P_{S_n^{(2)}}(1 + x, 1 + x^2, \cdots, 1 + x^{\frac{1}{2}n(n-1)}).$$

证明　设 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_N$ 为群作用 $(S_n^{(2)}, R^D)$ 上的全部轨道，则由 Pólya 定理知

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N} W(\theta_i) &= P_{S_n^{(2)}}\Big(\sum_{r\in R}\omega(r), \sum_{r\in R}\omega^2(r), \cdots, \sum_{r\in R}\omega^{\frac{1}{2}n(n-1)}(r)\Big) \\ &= P_{S_n^{(2)}}(1 + x, 1 + x^2, \cdots, 1 + x^{\frac{1}{2}n(n-1)}). \end{aligned}$$

另一方面，由 $g_n(x)$ 的定义知

$$g_n(x) = \sum_{i=1}^{N} W(\theta_i),$$

从而有

$$g_n(x) = P_{S_n^{(2)}}(1 + x, 1 + x^2, \cdots, x^{\frac{1}{2}n(n-1)}).$$　□

例 10.4.1　用定理 10.4.2 求 3 阶图的计数多项式 $g_3(x)$.

解 设 $V=\{1,2,3\}$, $S_3=\{e,(123),(12),(132),(13),(23)\}$, $D=V\times V=\{(1,2),(1,3),(2,3)\}$.

设 $e_1=(1,2)$, $e_2=(1,3)$, $e_3=(2,3)$, 则 D 上的对群 $S_3^{(2)}$ 如表 10.4.1 所示:

表 10.4.1 D 上的置换 S_3 及对群 $S_3^{(2)}$

D 上置换 S_3	D 上的对群 $S_3^{(2)}$
$e=(1)(2)(3)$	$(e_1)(e_2)(e_3)$
$(1\ 2\ 3)$	$(e_1\ e_3\ e_2)$
$(1\ 3\ 2)$	$(e_1\ e_2\ e_3)$
$(1\ 2)$	$(e_1)(e_2\ e_3)$
$(1\ 3)$	$(e_1\ e_3)(e_2)$
$(2\ 3)$	$(e_1\ e_2)(e_3)$

于是

$$P_{S_3^{(2)}}(x_1,x_2,x_3)=\frac{1}{6}(x_1^3+2x_3+3x_1x_2).$$

由定理 10.4.2 知

$$\begin{aligned}g_3(x)&=P_{S_3^{(2)}}(1+x,1+x^2,1+x^3)\\&=\frac{1}{6}((1+x)^3+2(1+x^3)+3(1+x)(1+x^2))\\&=x^3+x^2+x+1.\end{aligned}$$

□

显然, D 上的对群 $S_n^{(2)}$ 中有 $|S_n|=n!$ 个置换, D 中有 $\binom{n}{2}=\frac{n}{2}(n-1)$ 个元素. 因此, 当 n 增加时, 很难用例 10.4.1 中的方法直接求 $g_n(x)$(不妨试求 $g_5(x)$). 求 $g_n(x)$ 的关键之处在于求 $P_{S_n^{(2)}}\left(x_1,\cdots,x_{\frac{1}{2}n(n-1)}\right)$. 在这里, 我们直接给出下面的结果.

定理 10.4.3 设 $l=\frac{1}{2}n(n-1)$, 则

$$P_{S_n^{(2)}}(x_1,x_2,\cdots,x_l)=\frac{1}{n!}\sum_{j_1+2j_2+\cdots+nj_n=n}$$

$$\left[\frac{n!}{\prod_{k=1}^{n}j_k!\,k^{j_k}}\prod_{k=1}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}(x_kx_{2k}^{k-1})^{j_{2k}}\prod_{k=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}x_{2k+1}^{kj_{2k+1}}\cdot\prod_{k=1}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}x_k^{k\binom{j_k}{2}}\cdot\prod_{1\leqslant r<s\leqslant n-1}x_{m(r,s)}^{d(r,s)j_rj_s}\right].$$

其中 $m(r,s)$, $d(r,s)$ 分别为 r 与 s 的最小公倍数、最小公约数.

例 10.4.2　求 4 阶图的计数多项式 $g_4(x)$.

解　由定理 10.4.3 知 $S_4^{(2)}$ 的轮换指标为

$$
\begin{aligned}
& P_{S_4^{(2)}}(x_1, x_2, \cdots, x_6) \\
= & \frac{1}{4!} \sum_{j_1+2j_2+3j_3+4j_4=4} \left[\frac{4!}{\prod_{k=1}^{4} k^{j_k} j_k!} \prod_{k=1}^{2} \left(x_k x_{2k}^{k-1} \right)^{j_{2k}} \prod_{k=0}^{1} x_{2k+1}^{k \cdot j_{2k+1}} \prod_{k=1}^{2} x_k^{k\binom{j_k}{2}} \prod_{1 \leqslant r < s \leqslant 3} x_{m(r,s)}^{d(r,s) j_r j_s} \right] \\
= & \frac{1}{4!} \sum_{j_1+\cdots+4j_4=4} \frac{4!}{\prod_{k=1}^{4} k^{j_k} j_k!} \left(x_1^{j_2} (x_2 x_4)^{j_4} \cdot x_3^{j_3} \cdot x_1^{\binom{j_1}{2}} \cdot x_2^{2\binom{j_2}{2}} \cdot x_2^{j_1 j_2} x_3^{j_1 j_3} x_5^{j_2 j_3} \right) \\
= & \frac{1}{4!} \sum_{j_1+\cdots+4j_4=4} \frac{4!}{\prod_{k=1}^{4} k^{j_k} j_k!} x_1^{\binom{j_1}{2}+j_2} x_2^{j_4+2\binom{j_1}{2}+j_1 j_2} x_3^{j_3+j_1 j_3} x_4^{j_4} x_6^{j_2 j_3}.
\end{aligned}
\tag{10.4.1}
$$

而对称群 S_4 的置换型为 $1^4, 2^1 1^2, 2^2, 3^1 1^1, 4^1$. 将 1^4 型置换代入式(10.4.1) 的右端，即 $j_1 = 4, j_2 = j_3 = j_4 = 0$，得到$\frac{1}{4!}x_1^6$. 将 $2^1 1^2, 2^2, 3^1 1^1, 4^1$ 型置换代入式(10.4.1) 的右端，则分别得到$\frac{1}{4!}6x_1^2 x_2^2$，$\frac{1}{4!}3x_1^2 x_2^2$，$\frac{1}{4!}8x_3^2$，$\frac{1}{4!}6x_2 x_4$. 于是

$$
P_{S_4^{(2)}}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \frac{1}{4!}(x_1^6 + 9x_1^2 x_2^2 + 8x_3^2 + 6x_2 x_4).
$$

再由定理 10.4.2 知

$$
\begin{aligned}
g_4(x) &= P_{S_4^{(2)}}(1 + x, 1 + x^2, \cdots, 1 + x^6) \\
&= \frac{1}{4!}[(1 + x)^6 + 9(1 + x)^2(1 + x^2)^2 + 8(1 + x^3)^2 + 6(1 + x^2)(1 + x^4)] \\
&= 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 2x^4 + x^5 + x^6.
\end{aligned}
$$

$g_4(x)$ 的展开式中，x^m 的系数即为有 m 条边的 4 阶简单无标号图的数目. 即在 4 阶简单无标号图中，有 0,1,2,3,4,5,6 条边的图的个数分别为 1,1,2,3,2,1,1. 由此也可以得到全体 4 阶简单无标号图的个数为 $1 + 1 + 2 + 3 + 2 + 1 + 1 = 11$.　□

例 10.4.3　求 5 阶图的计数多项式 $g_5(x)$.

解　对称群 S_5 的置换型为 $1^5, 2^1 1^3, 2^2 1^1, 3^1 1^2, 3^1 2^1, 4^1 1^1, 5^1$. 于是

$$
\begin{aligned}
& P_{S_5^{(2)}}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}) \\
= & \frac{1}{5!}(x_1^{10} + 10x_1^4 x_2^3 + 15x_1^2 x_2^4 + 20x_3^3 x_1 + 20x_1 x_6 x_3 + 30x_2 x_4^2 + 24x_5^2).
\end{aligned}
$$

$$g_5(x) = \frac{1}{5!}((1+x)^{10} + 10(1+x)^4(1+x^2)^3 + 15(1+x)^2(1+x^2)^4$$
$$+ 20(1+x^3)^3(1+x) + 20(1+x)(1+x^3)(1+x^6)$$
$$+ 30(1+x^2)(1+x^4)^2 + 24(1+x^5)^2)$$
$$= x^{10} + x^9 + 2x^8 + 4x^7 + 6x^6 + 6x^5 + 6x^4 + 4x^3 + 2x^2 + x + 1.$$

从而,5 阶简单图的个数 N 为

$$N = P_{S_5^{(2)}}(2,2,\cdots,2)$$
$$= \frac{1}{5!}(2^{10} + 10\cdot 2^7 + 15\cdot 2^6 + 20\cdot 2^4$$
$$+ 20\cdot 2^3 + 30\cdot 2^3 + 24\cdot 2^2)$$
$$= 34.$$

当然也有 $N = g_5(1) = 34.$ □

习题十

1. 设 $\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 3 & 5 & 2 & 4 & 1 & 7 \end{pmatrix}$, $\varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

(1) 把 φ_1 和 φ_2 表示成不相交的轮换之积;

(2) 计算 $\varphi_1\varphi_2$ 和 $\varphi_2\varphi_1$,两者相等吗?

2. 计算(123)(234)(5)(14)(23).

3. 求 n 阶链 P_n 的自同构群 $\Gamma(P_n)$.

4.(1) 求正四面体的旋转(见题图 10.1) 在其顶点集上产生的置换群及其轮换指标;

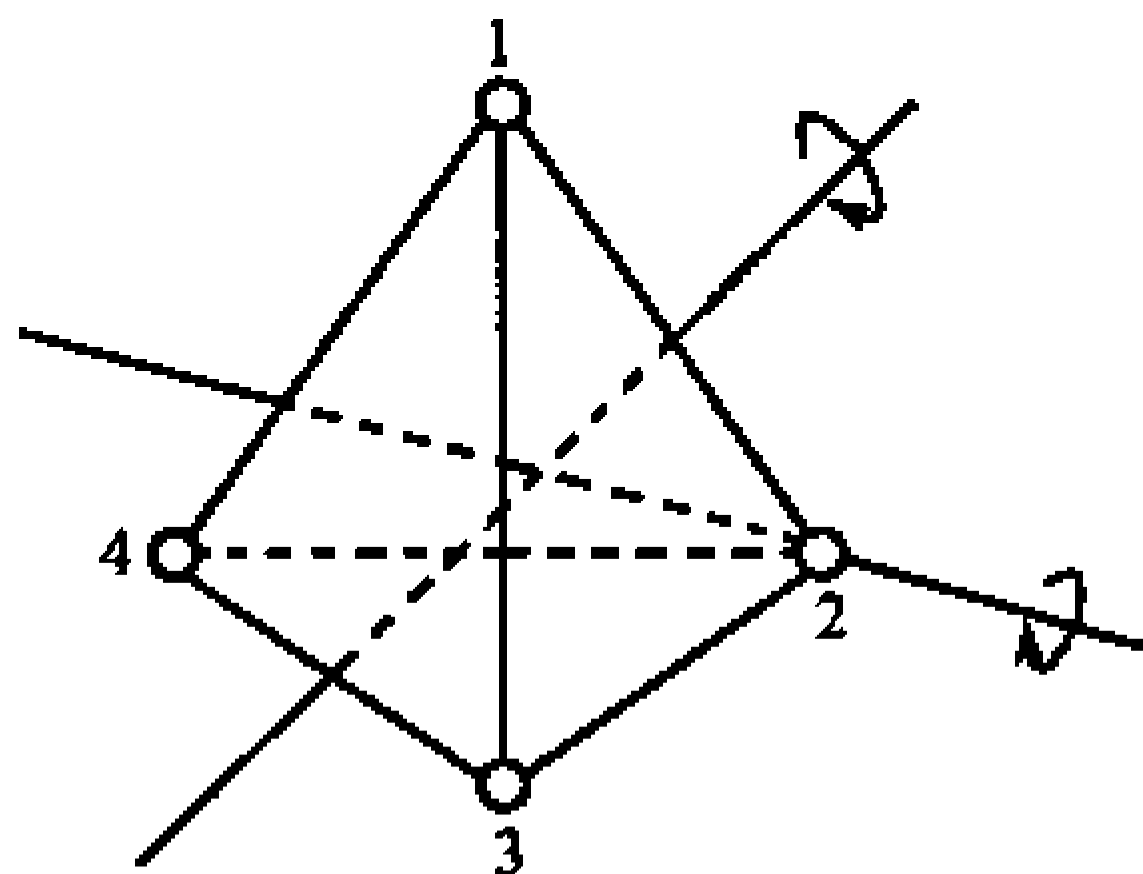
(2) 求正四面体的旋转在其棱集上产生的置换群及其轮换指标;

(3) 求正四面体的旋转在其面集上产生的置换群及其轮换指标.

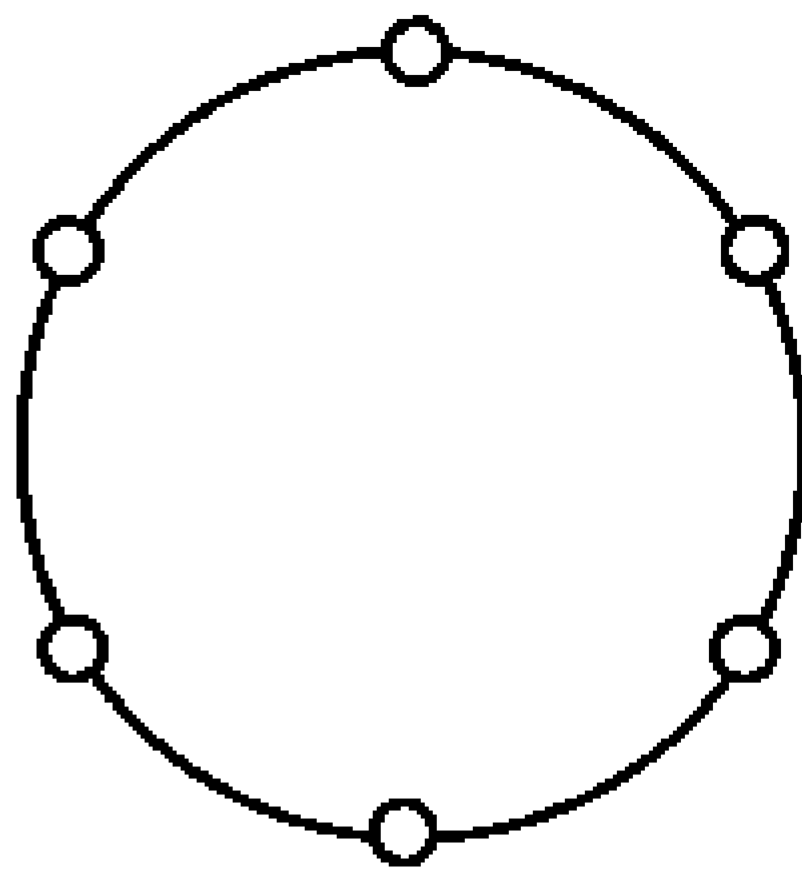
5. 由 0,1,6,8,9 组成 n 位数,如果把一个数调转过来读得到另一个数,则称这两个数是相等的,例如,0168 与 8910,0890 与 0680 是相等的,问不相等的 n 位数有多少个?

6. 由 a,b,c 三种颜色的 6 颗珠子镶成的圆环,如题图 10.2 所示,共有几种不同的方案?

7. 已给出两个 r 色的球、两个 b 色的球,把它们装在正六面体的顶点,试问有多少不同的方案?



题图 10.1



题图 10.2

8. 把4个球 a,a,b,b 放入3个不同的盒子里，求分配方案数。若不允许有空盒，问有多少种分配方案？

9. 用 4 种颜色(红、黄、绿、蓝)对正四面体的顶点染色，求染色方案数。若要求 $m(m=0,1,2,3,4)$ 个顶点为红色，求染色方案数。

10. (1) 具有六个顶点和七条边的不同构图有多少个？

(2) 具有六个顶点和六条边的不同构图有多少个？

11. 有英、法、德、俄、日、西班牙六种外语书各 2 本，将这几本书分送小王、小张两人，使每人得 6 本，问有多少种不同的送法？

12. 将 4 个球放入 3 个盒子中，求在以下 4 种不同情形下的分放方式数：

(1) 球和盒子均有编号；

(2) 球有编号，盒子无编号；

(3) 球无编号，盒子有编号；

(4) 球和盒子均无编号。

13. 设 $|A|=n$, $B=\{1,2,\cdots,m\}$, G 为 A 上的置换群，在群作用 (G,B^A) 之下，B^A 中满足条件 $\sum_{a\in A}f(a)=k$ 的映射 f 所组成的 G 轨道个数为 b_k，试证

$$\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^k=P_G\Big(\sum_{i=1}^{m}x^i,\sum_{i=1}^{m}x^{2i},\cdots,\sum_{i=1}^{m}x^{ni}\Big).$$

参考文献

1. Beckenbach E F. Applied Combinatorial Mathematics. Wiley, New York, 1964
2. Bollobas B. Extremal Graph Theory. Academic Press. London, 1978
3. Bondy J A, Murty S R. Graph Theory with Applications. Macmillan, London and Elsevier New York, 1976
4. 陈子岐,朱必文,刘峙山.图论.北京:高等教育出版社,1988
5. Chvàtal V. Tough Graphs and Hamilton Circuits. Discrete Math. 5(1973):215～228
6. Erdös P and O'Neil P E. On a generalization of Ramsey numbers. Discrete Math. 4(1973):29～35
7. Graver J E, Yackel J. Some graph theoretic results associated with Ramsey's Theorem. J. Combinatorial Theory, 4(1968):125～175
8. Greenwood R E, Gleason A M. Combinatorial relations and chromatic graphs. Canada. J. Math, 7 (1955):9～20
9. Harary F, Palmer EM. Graphical Enumeration. Academic Press, New York, 1973
10. John D D, Brian M. Permutation Groups. 上海:世界图书出版公司,1997
11. 刘振宏.应用组合论.北京:国防工业出版社,1993
12. Mendelsohn N S, Dalmage A L. Some generalization of the problem of distinct representatives. J. Match, Canada, 10(1958):230～241
13. Mirsky L and Perfect H. Systems of representatives. J. Math, Anal, Appl. 15(1966):520～568
14. Richard A, Brualdi. Introductory Combinatorics. Prentice Hall, Inc, 1999
15. Read R C. An introduction to chromatic polynomials. J. Combinatorial Theory. 4(1968):52～71
16. Riordan J. An introduction to combinatorial analysis. Wiley, New York, 1958
17. 邵嘉裕.组合数学.上海:同济大学出版社,1991
18. 孙淑玲,许胤龙.组合数学引论.合肥:中国科技大学出版社,1999
19. Sobczyk A, Gettys J D. Extended chromatic polynomials. Canada. J. Match, 24(1972):492～501
20. Tomescu I, Rudeanu S. Introduction to Combinatorics. Collet's Press. 1975
21. 谢政,李建平.网络算法与复杂性理论.长沙:国防科技大学出版社,1995

名词索引

B